



**Maria da Conceição
Gonçalves Martinho
Ferreira**

**Problemas de Medida e Geometria: Resoluções
Alternativas e Variantes Sem Palavras**



**Maria da Conceição
Gonçalves Martinho
Ferreira**

**Problemas de Medida e Geometria: Resoluções
Alternativas e Variantes Sem Palavras**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores, realizada sob a orientação científica da Doutora Rute Correia Lemos, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

Aos meus filhos – Maria Inês, Luís Afonso e José Eduardo – pela compreensão.

Ao meu marido pelo incansável apoio.

o júri / the jury

presidente / president

Prof. Doutora Maria Paula Sousa de Oliveira
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

vogais / examiners committee

Prof. Doutora Ana Catarina dos santos Carapito
Professora Auxiliar da Universidade de Beira Interior

Prof. Doutora Rute Correia Lemos
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

agradecimentos /
acknowledgements

A Deus por me ter dado a coragem para não desistir.

À minha orientadora por ter acreditado em mim e pela orientação prestada.

À minha família por todo o apoio e compreensão.

Palavras Chave

Provas sem Palavras, Ensino da Matemática, Geometria e Medida, Resolução de Problemas, Teorema de Pitágoras, Perímetro, Área, Volume.

Resumo

Nesta dissertação, incluem-se vários problemas de Matemática, envolvendo conteúdos de Geometria e Medida, dirigidos a estudantes do Ensino Básico e Secundário. A ideia orientadora é a seguinte: o uso de “provas sem palavras” em sala de aula pode contribuir para induzir nos alunos uma melhor compreensão de conceitos, relações, teoremas e demonstrações, por estes serem apresentados de um modo visual. Propomos uma aplicação mais frequente desta ferramenta pedagógica, uma vez que os estímulos visuais criam um ambiente propício à aprendizagem, acompanhada de uma estratégia de busca de resoluções alternativas para um problema, com vista a desenvolver o raciocínio, a capacidade de análise e o espírito crítico do estudante. Este documento encontra-se dividido em quatro capítulos principais. No primeiro, exploram-se três vias de demonstração do Teorema de Pitágoras, incluindo duas provas sem palavras originais criadas no decorrer deste trabalho. No segundo e terceiro capítulos, apresentam-se problemas de Geometria no plano e no espaço Euclidianos, respetivamente, sobre os temas áreas, perímetros e volumes, resolvidos por mais do que um processo. Cada problema motiva vários exemplos, construídos no espírito das provas sem palavras, apresentados a seguir para melhor consolidação do problema inicial. No quarto capítulo, abordam-se alguns paradoxos geométricos e figuras impossíveis, mostrando-se a importância de aplicar conhecimentos científicos para compreender melhor a Geometria e o mundo que nos rodeia.

Keywords

Proofs Without Words, Mathematics Teaching, Geometry and Measure, Problem Solving, Pythagorean Theorem, Perimeter, Area, Volume.

Abstract

In this dissertation, several mathematical problems are included, involving contents from Geometry and Measure, addressed to basic and secondary school students. The guiding idea is the following: the use of "proofs without words" in classroom may contribute to induce in students a better understanding of mathematical concepts, connections, theorems and proofs by presenting them in a visual way. We suggest a more frequent application of this pedagogical tool, since the visual stimulus creates a learning friendly environment, supported by a strategy of alternative resolution of problems pursuit, aimed at developing reasoning skills, analysis ability and critical thinking of students. This document is divided into four main chapters. In the first chapter, three visual ways of proof of the Pythagorean Theorem are explored, including two original proofs without words created while writing this work. In the second and third chapters, Geometry problems in the Euclidian plane and space are solved, respectively, with the themes of areas, perimeters and volumes, with at least two different processes. Each problem motivates several examples, constructed in the spirit of proofs without words, presented afterwards for further consolidation of the initial problem. In the fourth chapter, some geometric paradoxes and impossible figures are discussed, to provide the assurance that scientific knowledge is important to better understand the Geometry and the world around us.

Para aprender não basta só ouvir por fora, é necessário entender por dentro.

Padre António Vieira

Não há quem aprenda alguma coisa simplesmente por tê-la ouvido, e quem não se esforça sozinho em certas coisas acaba por conhecê-las apenas de modo superficial e pela metade.

J. Eckermann

A alegria que se tem em pensar e aprender faz-nos pensar e aprender ainda mais.

Aristóteles

Uma imagem vale mais que mil palavras.

Ditado popular

Conteúdo

Introdução	1
1 Teorema de Pitágoras	9
1.1 Triângulo retângulo de catetos 3 e 4	11
1.1.1 Provas sem palavras - Teorema de Pitágoras	17
2 Problemas de Geometria no Plano	21
2.1 Passadeira - triângulo e quadrado	23
2.1.1 Provas sem palavras - Área do triângulo	25
2.2 Dois quadrados parcialmente sobrepostos	27
2.2.1 Variantes sem palavras - Comparando áreas de quadriláteros	29
2.2.2 Provas sem palavras - Perímetro e área de quadrados sobrepostos	31
2.3 Quadrilátero como interseção de dois quadrados	32
2.3.1 Variantes sem palavras - Decompondo quadrados em quadriláteros	34
2.4 Ponto dentro do retângulo	36
2.4.1 Variantes sem palavras - Triângulos equivalentes em quadriláteros	38
2.5 Parede com três quadrados e um triângulo	40
2.5.1 Variantes sem palavras - Áreas de triângulos, quadrados e trapézios	43
2.6 Triângulo dentro de triângulo	45
2.6.1 Variantes sem palavras - Triângulos equivalentes	47
2.7 Triângulo e diagonal do quadrado	49
2.7.1 Variantes sem palavras - Área de triângulos com vértice na diagonal do quadrado	52
2.8 Relação entre áreas de quadrados	53
2.8.1 Provas sem palavras - Razão entre perímetros e áreas de figuras semelhantes	54
3 Problemas de Geometria no Espaço	57
3.1 Prismas dentro de um prisma	59
3.1.1 Variantes sem palavras - Volumes de prismas e pirâmides	63
3.2 Cubo e pirâmide	65
3.2.1 Variantes sem palavras - Medidas, áreas e volumes de pirâmides no cubo	69
3.3 Prisma hexagonal dentro do cubo	72
3.3.1 Variantes sem palavras - Volume de sólidos no cubo de aresta a	74
3.4 Relação entre volumes de cubos	79
3.4.1 Provas sem palavras - Razão entre volumes de cubos	80

3.5	À luz da vela	81
3.5.1	Variantes sem palavras - Perímetros, áreas e volumes na pirâmide .	83
3.6	Sólido gerado por rotação de um triângulo	84
3.6.1	Variantes sem palavras - Rotação de um triângulo a duas alturas . .	86
4	Paradoxos Geométricos e Imagens Impossíveis	89
4.1	Paradoxo do quadrado perdido	91
4.1.1	Outros paradoxos com quadrados adicionados e perdidos	98
4.2	Triângulo de Penrose ou Tribarra	100
4.2.1	Outras imagens	104
4.3	A cascata impossível de Escher	105
	Conclusão	109
	Bibliografia	113

Introdução

Este trabalho pretende ilustrar a seguinte ideia orientadora: o uso de “provas sem palavras” no Ensino da Matemática contribui para desenvolver competências matemáticas nos estudantes, estimulando a apreensão de evidências e promovendo a descoberta de conexões matemáticas. Procurar diferentes abordagens na resolução de um problema, ou na demonstração de um teorema, contribui para uma melhor compreensão do resultado e potencia novas formas de raciocínio, o que pode inspirar soluções simples e elegantes para problemas análogos, permitindo responder a problemas mais complexos ou demonstrar novos teoremas.

Alguns problemas no âmbito da Geometria e Medida constituem o ponto de partida de cada secção desta dissertação. Para cada problema, propõem-se diversas resoluções alternativas. Seguem-se algumas variantes ou provas sem palavras, motivadas pelas precedentes resoluções de índole geométrica. Destacam-se as duas provas sem palavras do Teorema de Pitágoras que encerram o primeiro capítulo, por serem um contributo original. No quarto capítulo, os problemas contemplam paradoxos geométricos e figuras impossíveis com o objetivo de salientar a importância de aplicar conhecimentos científicos com rigor na interpretação de uma imagem.

Sobre o conceito de provas sem palavras

Provas sem palavras são “figuras ou diagramas que os seus autores consideram tão sugestivas que facilmente nos convencem que podemos generalizar o padrão a todos os casos” [27]. A visualização é importante nestas provas e tem duas dimensões interligadas: a sensível (o ato físico de ver) e a intelectual (a compreensão da regra aí implícita). Se colocarmos uma criança em idade pré-escolar perante uma prova sem palavras, provavelmente ela não compreenderá, ou seja, não “verá” no sentido intelectual do termo. Há uma generalização implícita na compreensão da prova sem palavras que implica um salto do caso concreto, a figura apresentada, para o caso geral ou regra. Em contexto de sala de aula, as provas sem palavras ajudam a convencer e estimulam a compreensão dos estudantes.

Não é unanimemente aceite que as provas sem palavras constituam verdadeiras demonstrações, mas “permitem desenvolver o raciocínio matemático através de estímulos visuais” [27], fazendo apelo à evidência. O termo evidência remete para “visão”. Como na palavra emi-

grante, o “e” tem o significado de “para fora”. Se é uma “vidência” que salta de um objeto (e-vidência), trata-se de uma realidade que “salta à vista” e, por isso, não carece de explicações.

René Descartes, filósofo francês do século XVII, criador da Geometria Analítica e das coordenadas cartesianas¹, apreciava a Matemática pela clareza e evidência das suas razões. O autor da frase “penso, logo existo” considerava a evidência matemática o modelo para todos os tipos de conhecimento, o critério de verdade. Chamava “claro àquilo que é presente e manifesto a um espírito atento: tal como dizemos ver claramente os objetos, quando, estando presentes, agem muito fortemente, e que os nossos olhos estão dispostos a fitá-los” [10].

Na Matemática há dois tipos de elementos: os pontos de partida, os axiomas em sentido lato, incluindo os postulados, e os teoremas. Os axiomas não se provam, porque se consideram evidentes. Os teoremas provam-se, o que consiste em mostrar a sua evidência, ou seja, tornar visível a sua verdade. Contudo, não há nada absolutamente indiscutível: nem os axiomas. Por exemplo, Euclides considerou o Postulado das Paralelas² que para si era evidente, mas que não é válido nas chamadas Geometrias não Euclidianas, de Lobachevsky e de Riemann. Ficamos alerta: o que nos parece evidente pode não ser, dependendo da axiomática ou até de um ilusão de ótica.

Classicamente, a Matemática é considerada um sistema hipotético-dedutivo: na hipótese de serem válidos os pontos de partida, todo o sistema é válido, tendo em conta que os teoremas – o que se prova – são resultado de um raciocínio rigoroso.

Descartes apenas admitia como válidas as operações racionais que chamava intuição e dedução. A intuição apreende as primeiras evidências, as imediatas: os pontos de partida. A dedução traz à evidência aquilo que não é de imediato evidente. Descartes considerava assim dois tipos de evidência: imediata e mediata, sendo esta um produto do raciocínio dedutivo.

As provas sem palavras podem incluir-se neste tipo de raciocínio matemático: indutivo.

Neste contexto, chama-se indutivo ao processo de pensamento que de alguns casos particulares tira uma regra geral. Está classicamente associada às ciências experimentais, onde induzir é “conduzir para dentro de alguma coisa”.

Ao verificar que a água ferve a 100 graus centígrados em variadas situações, somos conduzidos à regra geral: a água ferve sempre aquela temperatura. Esta é uma daquelas regras válidas somente na aparência. Na verdade, a água não ferve a 100 graus centígrados numa panela de pressão, nem no alto do monte Everest. É necessário ir para além das aparências e captar a essência da questão que aqui se encontra na pressão atmosférica. A água ferve a 100 graus centígrados à pressão própria do nível do mar, no planeta Terra. Este exemplo serve para ilustrar porque não se concede normalmente à indução o mesmo caráter de rigor que se

¹Do seu nome em latim, Renatus Cartesius, derivou o adjetivo “cartesiano” que significa “de Descartes”.

²Num plano, por um ponto exterior a uma reta, apenas é possível fazer passar uma paralela a essa reta.

reconhece ao raciocínio dedutivo. Há por vezes a convicção de que o facto de se colecionar muitos casos concretos oferece maior garantia ao processo de indução. Realmente, isso não corresponde à verdade.

Galileu, ao ver um candelabro na Catedral de Pisa a oscilar, percebeu a regra do isocronismo das oscilações³. Bastou-lhe um caso para “ver” a regra ali presente, mas foi preciso saber ver. Também dizem que Isaac Newton “viu” a teoria da gravitação universal⁴ na simples queda de uma maçã. Uma prova sem palavras pretende mostrar, tornar visível uma regra geral. Apenas é preciso saber ver, ou seja, ir para além do caso concreto e ver nele a presença de uma regra geral.

Por exemplo, uma prova sem palavras do Teorema de Pitágoras deve deixar evidente que, qualquer que seja o tamanho e a posição dos catetos e da hipotenusa do triângulo retângulo, mantém-se válida a proporção matemática entre eles. Trata-se, assim, de uma regra geral, que não se limita ao caso concreto da figura apresentada, antes se aplica a qualquer triângulo retângulo, independentemente das suas dimensões.

Contudo, tal como no primeiro exemplo considerado, ebulição da água a 100 graus centígrados, há a possibilidade de indução em erro. É necessário ressaltar as diferenças entre uma ciência formal, como é a Matemática, e as ciências experimentais. Mas o processo de pensamento é, no essencial, o mesmo.

A polémica em torno do reconhecimento do valor demonstrativo das provas sem palavras na Matemática prende-se talvez com o facto de associar-se a indução à falibilidade. Também é verdade que mesmo os mais insuspeitos fundamentos da Matemática foram postos em questão, como a Geometria Euclidiana. Se, como dizia Descartes, a evidência é o critério de verdade, então é adequado considerar que as provas sem palavras pretendem precisamente mostrar evidências.

Historicamente, as raízes das provas sem palavras remontam à China antiga e Grécia clássica. Na sua versão moderna, ganharam notoriedade sob a sigla PWWs, do inglês *proofs without words*, tornando-se regulares nas revistas *Mathematics Magazine* e *College Mathematics Journal*, publicadas pela Associação Americana de Matemática, após o sucesso do artigo *Two Mathematical Papers Without Words* de Rufus Isaacs [16] que apareceu em 1975.

As primeiras compilação inteiramente dedicadas ao tema devem-se a Roger B. Nelsen, professor de Matemática em *Lewis and Clark College*, em Portland, Oregon, Estados Unidos da América, com os títulos:

- *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*, publicado em 1993;
- *Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking*, publicado em 2000.

³As oscilações de um pêndulo são isócronas (demoram o mesmo tempo), desde que se mantenha o comprimento do pêndulo. Podem ser mais ou menos amplas, mas o tempo da oscilação mantém-se. É a base dos relógios de pêndulo.

⁴A matéria atrai a matéria na razão direta das massas e na inversa do quadrado das distâncias.

Aconselha-se ao leitor interessado que não deixe de os consultar, bem como a restante bibliografia, incluindo as obras que Nelsen publicou posteriormente em co-autoria com Claudi Alsina, professor de Matemática da Universidade Politécnica da Catalunha, em Barcelona. Desde então, as provas sem palavras tornaram-se populares, surgiram em diversas páginas da Internet, e valorizou-se o seu papel simultaneamente recreativo e pedagógico. Foram principalmente aqueles dois livros de Roger B. Nelsen [19, 20] e diversas demonstrações do Teorema de Pitágoras que serviram de inspiração e alavanca para a realização do trabalho que se apresenta a seguir.

Sobre a estrutura desta dissertação

Os currículos de Matemática, em vigor em Portugal em 2015, para o 3.º ciclo do Ensino Básico e para o Ensino Secundário, incluem Metas Curriculares [12] que dão maior destaque e importância à prova matemática que os currículos anteriores.

Muitas vezes, o professor procura resolver muitos exercícios em sala de aula, sem explorar cada um devidamente, e os alunos apenas mecanizam procedimentos. Os livros de exercícios resolvidos e os manuais do professor contêm quase sempre uma única proposta de resolução para cada problema. Promover a procura de diferentes resoluções para um exercício obriga o aluno a pensar mais, a refletir sobre os processos utilizados, a perspetivar novas relações. Esta dissertação aborda alguns temas de Geometria e Medida, divididos pelos capítulos:

1. Teorema de Pitágoras;
2. Problemas de Geometria no Plano;
3. Problemas de Geometria no Espaço;
4. Paradoxos Geométricos e Imagens Impossíveis.

Cada capítulo contém várias secções, cada uma dedicada à exposição de um problema inicial, na maioria dos casos adaptado de um manual escolar, acompanhado dos pré-requisitos fundamentais, e à apresentação de duas ou mais propostas de resolução, com indicação do nível de escolaridade a que se destinam. Para terminar, o desafio deixado ao leitor consiste na observação, numa subsecção à parte, de variantes ou provas sem palavras motivadas pelo problema anterior.

Nesta dissertação, adotamos a designação “variantes sem palavras” para classificar uma coleção de figuras, cujas propriedades destacadas apenas variam no seu raciocínio do exercício inicial por se ter alterado a posição de um ponto, a medida do comprimento de um segmento, a forma geométrica de um polígono ou de um sólido. Utilizamos a terminologia “prova sem palavras”, como na literatura sobre o tema, quando a imagem se refere a um teorema bem conhecido, como seja o caso do Teorema de Pitágoras, ou a uma propriedade genérica manifestamente relevante.

O matemático húngaro George Pólya, autor do famoso livro *How to Solve It*, publicado pela primeira vez em 1945, e conhecido pela afirmação *draw a picture*, formulou quatro etapas essenciais na resolução de um problema:

- 1.^a etapa - Compreender o problema;
- 2.^a etapa - Traçar um plano, isto é, delinear uma estratégia de resolução;
- 3.^a etapa - Colocar o plano em prática;
- 4.^a etapa - Comprovar os resultados.

Nesta dissertação, dá-se particular ênfase à quarta etapa, aquela a que tipicamente alguns professores dedicam menor atenção e atribuem menor importância em contexto na sala de aula. O estudante restringe-a quase sempre a confirmar se o resultado obtido está de acordo com as soluções apresentadas pelo manual ou pelo professor. Podemos mesmo afirmar que a abordagem aqui proposta divide a última etapa de Pólya nas duas seguintes:

- Resolver o problema por outro(s) processo(s) para confirmar os resultados;
- Resolver problemas idênticos, com base numa imagem, relacionando conhecimentos.

Deixar o estudante descobrir que não há um método único para resolver um problema oferece segurança. Resolver exercícios semelhantes, com grau de dificuldade mais elevado, sem ser necessário ler um enunciado, apenas observando uma imagem e algumas condições iniciais, pode ser motivador e catalisador de assimilação de conteúdos. Pretende-se ainda que o estudante interiorize bem o problema original.

As resoluções alternativas elencadas para cada problema procuram seguir a seguinte ordem:

- a primeira é de natureza essencialmente algébrica ou analítica;
- a última é de cariz geométrico, por isso, diretamente associada à subsecção que inclui as variantes ou provas sem palavras.

As variantes ou provas sem palavras têm também o propósito de ajudar o aluno a abstrair. Pretende-se que o estudante descubra a conexão com a fórmula ou proposição que a imagem sugere, por observação atenta e leitura correta da figura. No Ensino da Matemática, estas podem ser usadas pelo professor de variadas formas:

- Apresentando, em voz alta, uma explicação pormenorizada que justifique a relação;
- Promovendo a comunicação matemática,
 - pedindo a um aluno que apresente oralmente a sua explicação aos colegas de turma;
 - sugerindo o tema para um relatório escrito ou trabalho de grupo;
- Indicando problemas semelhantes para trabalho de casa;
- Propondo exercícios de correspondência entre imagens e fórmulas;
- Integrando-as em questões de escolha múltipla, verdadeiro ou falso, preenchimento de espaços em branco.

O último capítulo alerta para a necessidade de rigor nos raciocínios geométricos, decorrentes

da visualização de uma imagem, e da importância do conhecimento científico. Incluem-se problemas associados a alguns paradoxos geométricos conhecidos ou imagens impossíveis: o paradoxo do quadrado perdido, o triângulo de Penrose e a cascata impossível de Echer. Estes exemplos não fazem parte do currículo, mas dado o seu interesse podem ser abordados na primeira ou última aula de um período letivo, na lição número 100, no dia da Matemática, no final de uma aula ou no âmbito de um clube de Matemática.

Na página seguinte encontra-se uma tabela com conteúdos selecionados do tema Geometria e Medida⁵, abordados no Ensino Básico e Ensino Secundário, intimamente ligados a problemas desta dissertação e enquadrados nos anos de escolaridade em que se lecionam.

São conhecidos os obstáculos que o professor enfrenta, quando confrontado com a necessidade de cumprir um programa extenso e com uma turma de alunos que manifestam inúmeras dificuldades.

Vamos procurar mostrar algumas vantagens decorrentes de diversificar processos de resolução de um mesmo problema e da visualização de imagens, construídas no espírito das provas sem palavras, quando corretamente interpretadas, fundamentadas em conhecimentos científicos e relacionadas com o problema original. Se o estudante abraçar estes desafios com espírito crítico, pode perceber melhor a construção de alguns conceitos matemáticos e compreender o problema por dentro, o que está no seu cerne. Ao mesmo tempo, a confiança ganha neste processo tem um enorme potencial na receptividade, motivação e envolvimento do aluno para participar ativamente noutras tarefas. A alegria pela descoberta da Matemática é a melhor recompensa e o melhor incentivo para prosseguir a aprendizagem, corroborando a frase de Aristóteles antes citada. No contexto deste trabalho, têm igualmente significado as citações escolhidas para abrir o texto desta dissertação, atribuídas ao Padre António Vieira e a J. EcKermam.

⁵Tal tabela não dispensa a consulta das Metas Curriculares [12].

	Área	Volume	Outros
1.º ano	Figuras equidecomponíveis	Figuras equivalentes	
2.º ano	Medidas de área em unidades não convencionais	Sólidos equidecomponíveis em cubos de arestas iguais	Perímetro de um polígono
3.º ano	Quadrado e retângulo	Cubo	
4.º ano	Unidades de área	Unidades de volume	Noção de ângulo, vértice e amplitude
5.º ano	Paralelogramo e triângulo		Igualdade de triângulos; soma dos ângulos internos de um triângulo
6.º ano	Polígonos regulares; círculo	Paralelepípedo; prisma reto; cilindro reto;	Perímetro do círculo; polígono regular (apótema); relação de Euler; ponto médio; mediatriz; polígono côncavo e convexo
7.º ano	Papagaio, losango e trapézio		Razão entre perímetros e áreas de figuras semelhantes; Teorema de Tales; critérios de semelhança de triângulos; soma dos ângulos internos e externos de um polígono; classificação dos quadriláteros; equação reduzida da reta
8.º ano			Teorema de Pitágoras; recíproco do Teorema de Pitágoras; sistemas de duas equações a duas incógnitas
9.º ano	Superfície de poliedros; superfície lateral de cone reto; superfície esférica	Pirâmide, cone e esfera	
10.º ano			Referencial cartesiano no espaço
11.º ano			Produto escalar; equações de planos no espaço

Capítulo 1

Teorema de Pitágoras

Pitágoras é um dos maiores filósofos da Europa antiga. A sua figura está rodeada de mitos e lendas. Segundo alguns, terá nascido por volta de 570 a.C. em Samos, uma ilha grega do mar Egeu, e terá viajado pelo Egito, Babilónia e possivelmente pela Índia. No regresso, fixou-se em Crotona, uma colónia grega do sul de Itália, onde fundou a Escola Pitagórica, uma sociedade secreta de carácter científico-político-religioso que se dedicava em particular ao estudo da Aritmética, Música, Geometria e Astronomia, cujas atividades fortemente determinaram a evolução da Matemática e Filosofia. Pitágoras terá sido o primeiro a conceber a Matemática como sistema de pensamento fulcrado em provas dedutivas.

O Teorema de Pitágoras é o mais famoso resultado da Geometria Euclidiana Plana, celebrado pela simplicidade do seu enunciado: num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. É incerto o contributo de Pitágoras neste domínio e irónico que o teorema fique consagrado com o seu nome, o criador de uma comunidade que preconizava que a propriedade intelectual devia ser considerada coletiva.

Há indícios de que este teorema já seria conhecido dos babilónios do tempo de Hamurabi, o legislador, mais de um milénio antes de Pitágoras. Um dos primeiros registos de uma prova pictórica deste teorema surge num tratado chinês sobre Astronomia e Matemática, “Zhou Bi Suan Jing” ou “Chou Pei Suan Ching”, que remonta aos períodos das dinastias Han e Zhou.

A incomensurabilidade entre a diagonal e o lado de um quadrado é consequência direta do Teorema de Pitágoras. Paradoxalmente, tal constatação revelou-se inconciliável com o ideal Pitagórico de atribuir aos números inteiros o poder de descrever o mundo. Esta importante descoberta, a existência de números irracionais, gerou uma crise entre os Pitagóricos, só resolvida por volta de 370 a.C. com a criação da Teoria das Proporções por Eudoxo de Cnido.

O Teorema de Pitágoras surge na Proposição 47 do Livro I dos “Elementos” de Euclides. A

Proposição 48 contém o seu recíproco, a relação $a^2 + b^2 = c^2$ entre as medidas a, b e c dos lados de um triângulo implica que este é retângulo no vértice oposto ao lado de medida c . Euclides demonstrou também a versão generalizada às áreas de quaisquer figuras semelhantes construídas sobre os lados de um triângulo retângulo na Proposição 31 do Livro VI. Sabe-se ainda que o Teorema de Pitágoras é equivalente ao Postulado das Paralelas.

Muitos outros matemáticos apresentaram provas alternativas do Teorema de Pitágoras, ao longo dos tempos, utilizando argumentos algébricos, aritméticos, analíticos, geométricos ou vetoriais, alguns famosos, como Pappus de Alexandria, Bhaskara (matemático hindu do século XII), Leonardo da Vinci e George Pólya.

Elisha Scott Loomis, professor de Matemática em Cleveland, no Ohio, Estado Unidos da América, no início do século XX, compilou uma coleção de demonstrações do Teorema de Pitágoras no seu livro *The Pythagorean Proposition*. A primeira edição de 1927 inclui 230 provas e a segunda, publicada em 1940 aos 87 anos de Loomis, conta com um leque alargado de 367 demonstrações. O primeiro título da série *Classics in Mathematics Education* [17] publicado pelo *National Council of Teachers of Mathematics* reproduz esta segunda edição em 1968. Loomis refere que o número de possíveis provas algébricas e geométricas do Teorema de Pitágoras é ilimitado e deixa ao leitor a sugestão de escolher a sua preferida ou de encontrar uma prova nova, diferente¹.

Hoje em dia, existem inúmeros *sites* na Internet alusivos ao tema, destacamos o mantido por Alexander Bogomolny denominado *Pythagorean Theorem and its many proofs* [7], contendo mais de uma centena de demonstrações.

O Teorema de Pitágoras é um conteúdo lecionado em Portugal no 3.º ciclo do Ensino Básico no 8.º ano de escolaridade. A demonstração mais usada nos manuais é baseada na semelhança de triângulos, decorrente do Teorema de Tales lecionado no 7.º ano. Aborda-se igualmente o recíproco do Teorema de Pitágoras e alguns livros escolares incluem, a título de curiosidade, provas por comparação de áreas.

O Teorema de Pitágoras tem inúmeras aplicações, entre as quais se podem destacar todos os cálculos que envolvem relações espaciais e trigonométricas, mais concretamente, o cálculo da diagonal de um retângulo, da diagonal espacial de um prisma, o cálculo da altura de polígonos, relação entre altura, geratriz e raio da base num cone reto, distância entre dois quaisquer pontos no plano e no espaço Euclidiano, a fórmula fundamental da trigonometria, o módulo de um número complexo. Aplica-se em diversos problemas do quotidiano e noutras ciências puras ou aplicadas.

¹Na introdução do seu livro, Loomis escreve: *Read and take your choice; or better, find a new, a different proof, for there are many more proofs possible whose figure will be different from any one found herein* [17].

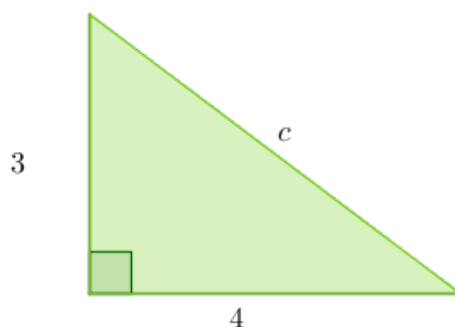
Neste capítulo, dedicamos a primeira secção a um problema muito simples, envolvendo o mais famoso terno Pitagórico (3,4,5). Pretende-se simplesmente determinar a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo, sabendo que os seus catetos têm comprimento 3 e 4. Sugerem-se três propostas de resolução deste problema, envolvendo raciocínios essencialmente geométricos.

Terminamos o capítulo com as provas sem palavras que as propostas de resolução anteriores sugerem; as duas primeiras são bem conhecidas, a primeira simples e apelativa surge em diversos manuais escolares do 8.º ano e a segunda deve-se ao presidente americano James A. Garfield. As últimas duas provas sem palavras incluídas neste capítulo destacam-se por serem um contributo original da autora desta dissertação.

1.1 Triângulo retângulo de catetos 3 e 4

Problema

Considere o triângulo retângulo de catetos com 3 e 4 centímetros de comprimento.



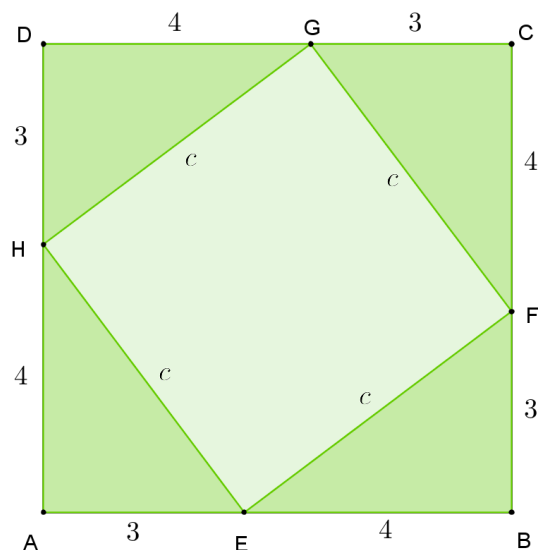
Determine a medida da hipotenusa deste triângulo retângulo.

Na tabela seguinte, apresentam-se os principais pré-requisitos necessários para a resolução deste problema.

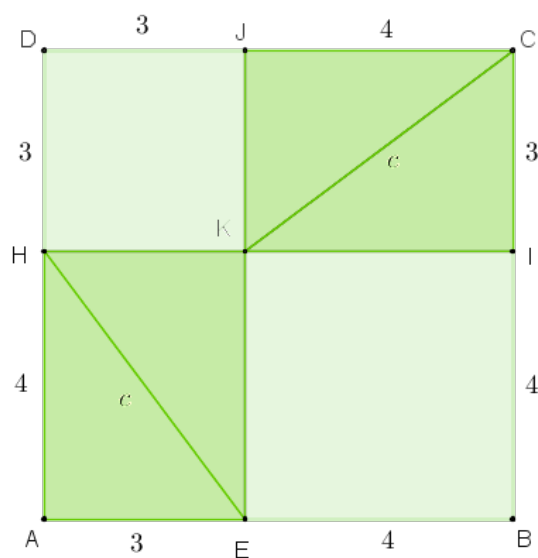
Proposta de resolução	Pré-requisitos
1	Triângulos congruentes; área do quadrado; raiz quadrada.
2	Área do trapézio; área do triângulo; raiz quadrada.
3	Polígonos geometricamente iguais; figuras equivalentes; raiz quadrada; área do quadrado.

Proposta de Resolução 1

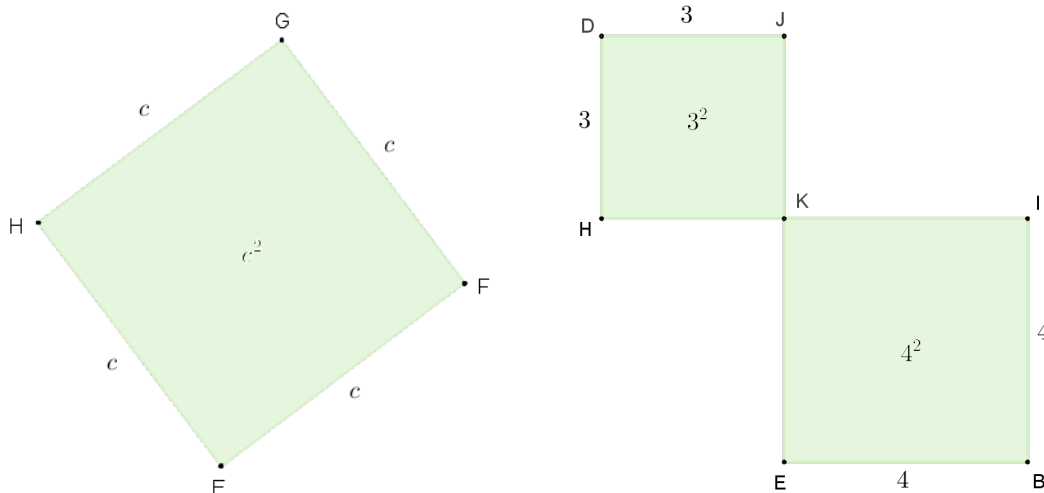
Considere quatro triângulos congruentes (ou geometricamente iguais) ao apresentado no enunciado, dispostos como na figura.



Vamos dispor novamente os quatro triângulos do seguinte modo.



Observando as duas figuras, podemos concluir que a área do quadrado $[EFGH]$ é igual à soma das áreas dos dois quadrados $[DHKJ]$ e $[EBIK]$:



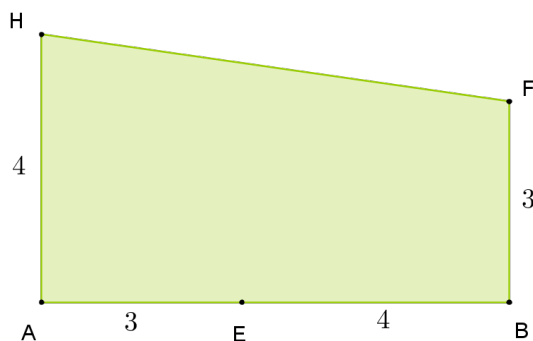
Assim, a área do quadrado $[EFGH]$ é igual a

$$c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

e $c = \sqrt{25} = 5$. Portanto, a hipotenusa tem 5 centímetros de comprimento.

Proposta de Resolução 2

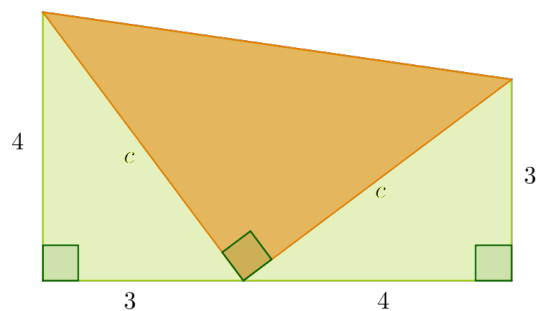
Considere um trapézio como o da figura.



Considerando as medidas 3, 4 e 7, respectivamente, da base menor, base maior e altura do trapézio, calculamos a sua área:

$$A_{[ABFH]} = \frac{3+4}{2} \times 7 = 24,5.$$

De seguida, decompomos o trapézio em três triângulos retângulos: dois triângulos congruentes ao do enunciado do problema e outro com ambos os catetos de comprimento c como na figura seguinte.



Podemos calcular a área do trapézio de outra forma a partir da soma das áreas dos três triângulos. Calculando cada uma destas áreas separadamente, temos

$$A_{[HEF]} = \frac{c^2}{2} \quad \text{e} \quad A_{[AEH]} = A_{[EBF]} = \frac{3 \times 4}{2} = 6.$$

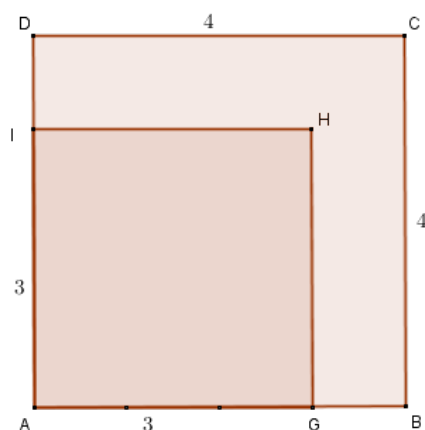
Podemos igualar as duas expressões da área do trapézio,

$$\frac{c^2}{2} + 2 \times 6 = 24,5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c^2}{2} = 12,5 \quad \Leftrightarrow \quad c^2 = 25,$$

para obter o valor de $c = \sqrt{25} = 5$. Logo, a hipotenusa do triângulo inicial mede 5 cm.

Proposta de Resolução 3

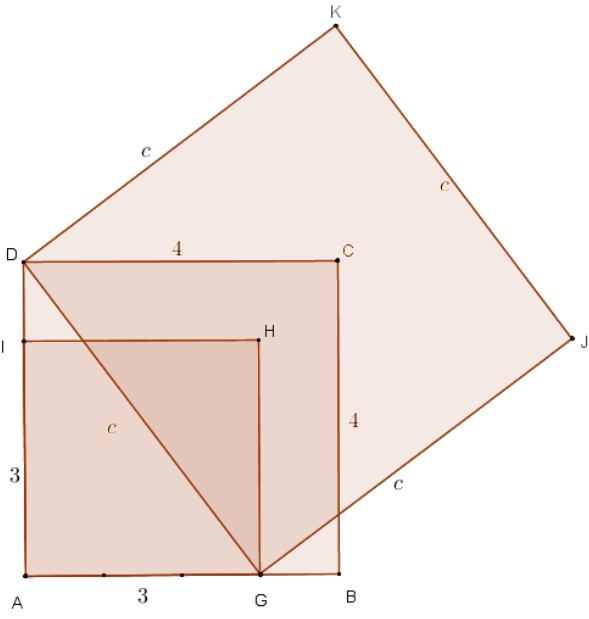
Na figura abaixo, sobrepõem-se dois quadrados com 3 e 4 centímetros de lado.



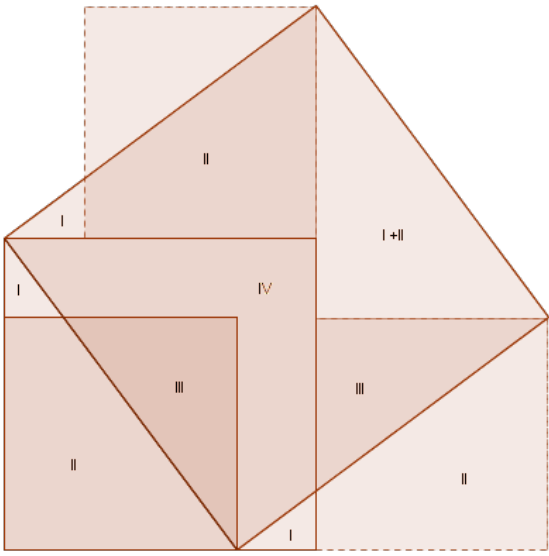
A soma das áreas deste dois quadrados, em centímetros quadrados, é

$$A_{[ABCD]} + A_{[AGHI]} = 3^2 + 4^2 = 25.$$

Seguidamente, constrói-se um quadrado com c centímetros de lado como na próxima figura.



Decompomos o quadrado com c^2 centímetros quadrados de área como a seguir se indica.

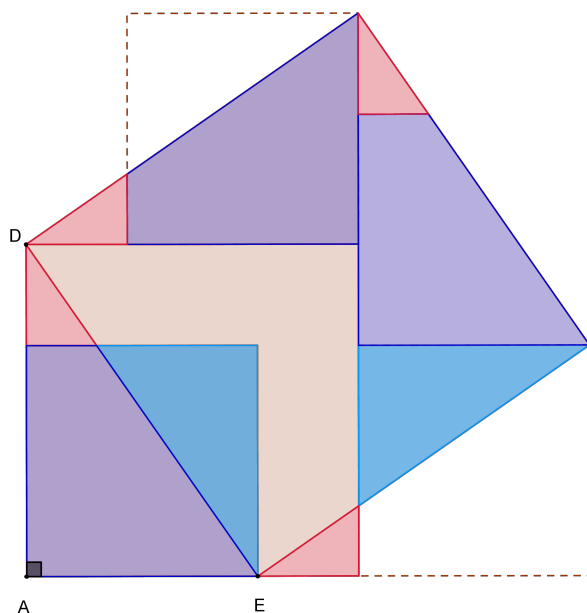


Denotando por *I, II, III* e *IV* o valor da área do *menor* polígono representado na figura que contém tal notação, obtêm-se as seguintes áreas:

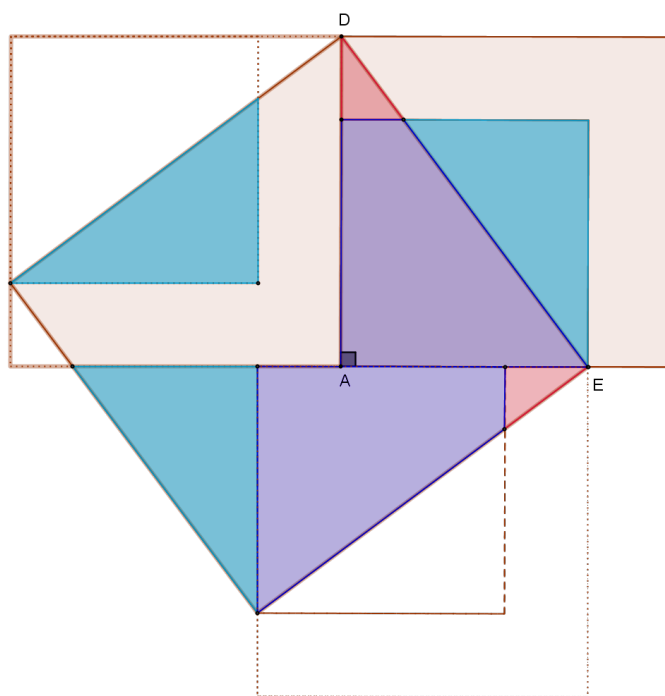
$$\begin{aligned} A_{[AGHI]} &= II + III; \\ A_{[ABCD]} &= I + I + II + III + IV; \\ A_{[DGJK]} &= 2(I + II + III) + IV = A_{[ABCD]} + A_{[AGHI]} = 25. \end{aligned}$$

Como $c = \sqrt{25} = 5$, a hipotenusa do triângulo retângulo tem 5 centímetros de comprimento.

Em alternativa, para uma melhor visualização, podemos destacar os polígonos congruentes da figura anterior, colorindo-os com uma mesma cor, como a seguir sugerido.



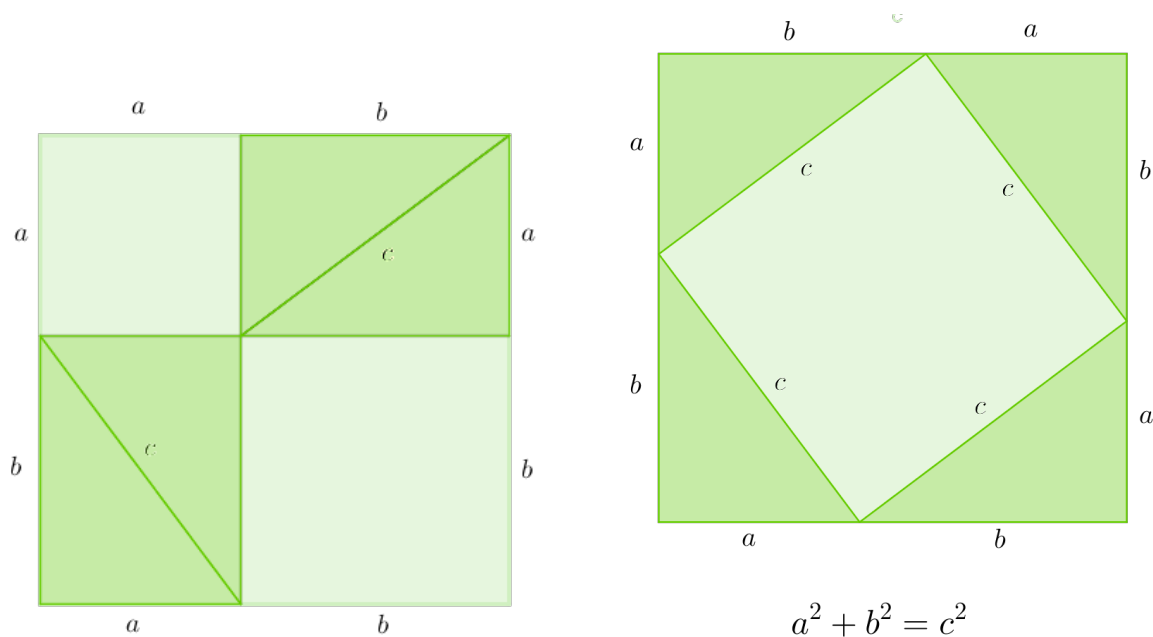
De modo idêntico, podemos analisar a imagem seguinte, em que se mantém sobrepostos os quadrados de medidas dos lados 3, 4 e o quadrado com medida do lado igual à da hipotenusa do triângulo retângulo se encontra refletido relativamente à reta DE .



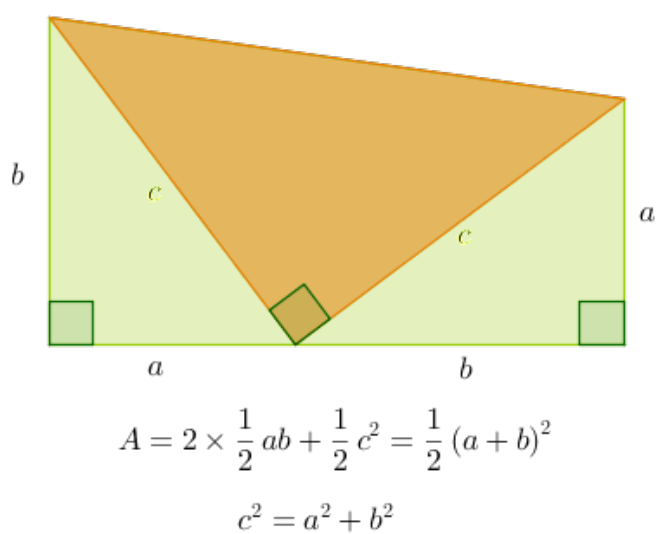
1.1.1 Provas sem palavras - Teorema de Pitágoras

Apresentam-se agora as provas sem palavras do Teorema de Pitágoras associadas às resolução anteriores. No final do capítulo, incluem-se algumas observações sobre cada prova.

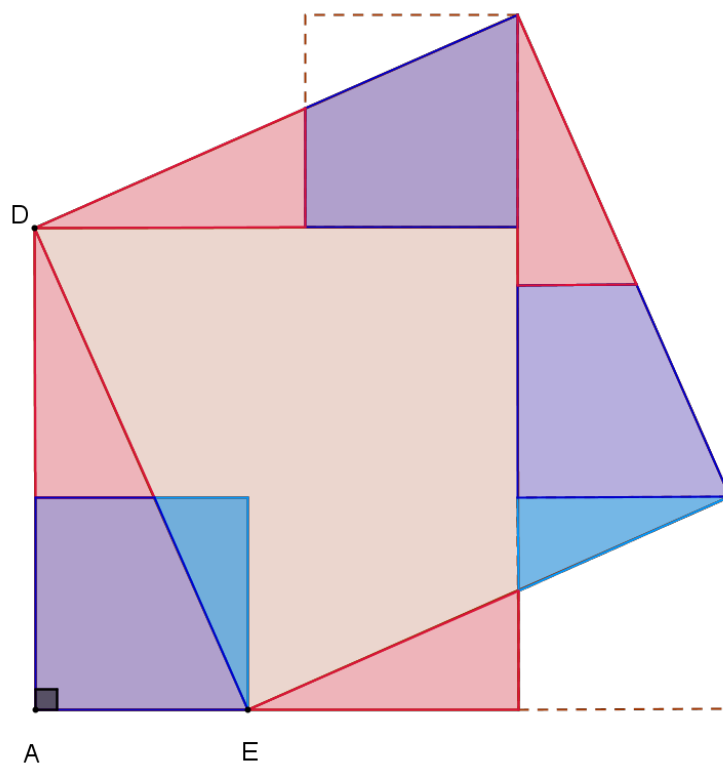
Prova do quadrado chinês



Prova do presidente americano J. A. Garfield



Duas provas sem palavras originais

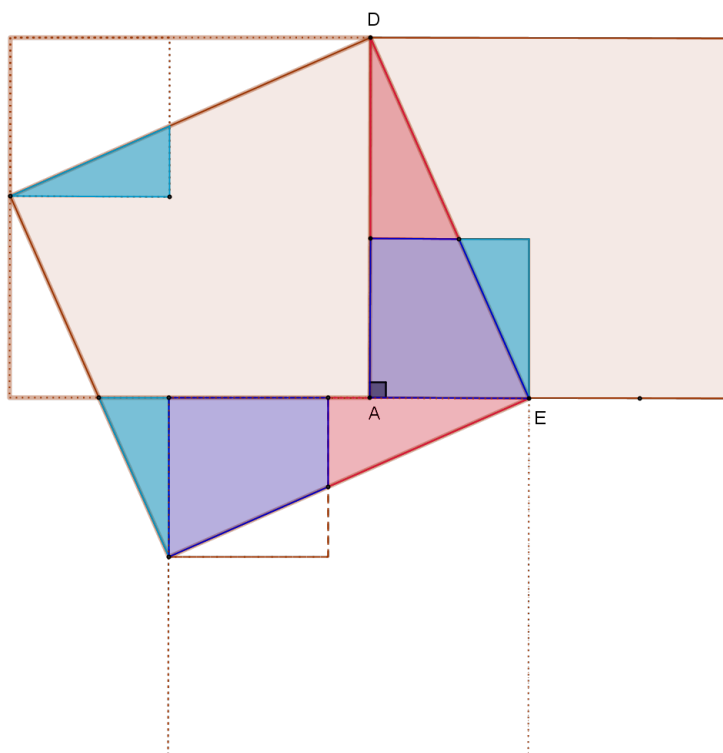


$$\overline{AE} = a$$

$$\overline{AD} = b$$

$$\overline{DE} = c$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$



$$\overline{AE} = a$$

$$\overline{AD} = b$$

$$\overline{DE} = c$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Observações sobre as anteriores provas sem palavras

No livro *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking* [19], compilado por Roger B. Nelsen e publicado pela Associação Americana de Matemática em 1993, incluem-se algumas provas do Teorema de Pitágoras, a primeira das quais é a que apresentámos como prova do quadrado chinês.

Esta foi também apresentada por Rufus Isaacs no artigo *Two Mathematical Papers Without Words* [16], celebrizado por inaugurar, em setembro de 1975, a coluna *Proofs Without Words* (PWWs) da revista *Mathematics Magazine* da Associação Americana de Matemática.

Ambos os autores apresentam as imagens sem sequer incluir as medidas dos lados do triângulo. Aqui optámos por as incluir para uma melhor compreensão.

Esta prova visual é, por vezes, denominada a prova do quadrado chinês, uma vez que se baseia na decomposição sugerida pelo diagrama incluído no texto *Zhou Bi Suan Jing*.

Existem algumas variantes desta prova sem palavras.

Uma das variantes mais sugestivas contém uma sequência de quatro quadrados, os extremos são os da imagem da prova do quadrado chinês e os dois adicionais apenas diferem do antecessor pela translação de um dos triângulos congruentes dentro do quadrado. Bastam por isso três movimentos de translação, envolvendo os triângulos, para que a figura inicial se transforme na final, o que permite demonstrar que são iguais as áreas dos quadrados remanescentes, ou seja, o Teorema de Pitágoras. Tal variante foi considerada a prova visual mais elegante do Teorema de Pitágoras pelos autores Claudi Alsina e Roger Nelson no livro *Math Made Visual: Creating Images for Understanding Mathematics* [1], publicado em 2006.

A segunda prova sem palavras aqui apresentada foi descoberta pelo general americano James Abram Garfield que foi eleito presidente dos Estados Unidos em 1881, cargo que ocupou por pouco mais de seis meses, após ter sido vítima de um atentado. Era um entusiasta de Matemática e demonstrou o Teorema de Pitágoras enquanto ainda era membro da câmara de representantes. A sua demonstração foi publicada no *New England Journal of Education*, em 1876.

Comparando a decomposição efetuada naquele trapézio retângulo com a prova do quadrado chinês, observamos que, ao construir um segmento unindo dois vértices opostos no quadrado de lado c na segunda figura da prova do quadrado chinês, a imagem divide-se em dois trapézios retângulos congruentes ao criado por Garfield.

As últimas duas provas pictóricas aqui apresentadas surgiram no decorrer do trabalho desta dissertação. Pensamos tratar-se de provas originais do Teorema de Pitágoras.

Existem recordes mundiais do *Guinness* atribuídos por resultados obtidas no desporto ou por descobertas na ciência. Também existem alguns recordes registados em Matemática: ao que parece ao Teorema de Pitágoras foi atribuído o prémio do teorema mais provado de sempre.

Recentemente, surgiram as provas sem palavras de segunda geração: provas visuais disponibilizadas *online* através de *applets* interativos criados recorrendo a software de geometria dinâmica. Estas foram designadas por PWWs 2.0 num artigo² publicado em agosto de 2014 na *Convergence* [13], uma publicação periódica *online* da Associação Americana de Matemática que divulga recursos relacionadas com a História e Ensino da Matemática.

Poderá este ser mais um motivo, entre tantos outros, para o Teorema de Pitágoras continuar a ser alvo de pesquisa e assim realçar as potencialidades que as demonstrações de índole geométrica podem oferecer num domínio que parece não ter limites à vista.

²Os autores desse artigo deixaram um apelo à criação de uma coluna regular sobre o tema PWWs 2.0 naquela revista, atendendo ao sucesso obtido pelas congéneres colunas das revistas *Mathematics Magazine* e *College Mathematics Journal* sobre as tradicionais PWWs.

Capítulo 2

Problemas de Geometria no Plano

No primeiro capítulo, centrou-se a atenção num único problema que motivou a introdução do Teorema de Pitágoras e algumas provas sem palavras deste icónico resultado da Geometria Euclidiana Plana.

Neste segundo capítulo, apresentam-se diversos problemas envolvendo conceitos de Geometria e Medida no plano, vocacionados para consolidar os conteúdos: perímetros e áreas de polígonos; relação entre perímetros e áreas de figuras semelhantes.

Cada secção contém o enunciado de um problema e mais do que uma proposta de resolução. A primeira resolução utiliza argumentos de natureza essencialmente algébrica e a última proposta apela fortemente ao uso de raciocínios geométricos, decorrentes da decomposição de uma figura, comparação de áreas e perímetros de polígonos, da obtenção de figuras equivalentes ou semelhantes. Surgem, de seguida, as variantes sem palavras motivadas pelo problema anterior ou provas sem palavras de resultados associados como, por exemplo, a fórmula para a área de um triângulo e a relação entre áreas de figuras semelhantes, abordadas na primeira e última subsecção, respetivamente.

Importa realçar que nem todas as fórmulas associadas às imagens das subsecções de variantes sem palavras admitem uma explicação rápida. Pretende-se antes que esta seja intuitiva, após explorado o problema inicial com detalhe, ou que seja uma generalização natural da fórmula anterior associada a uma imagem com propriedades similares. Num caso, ou outro, podem ser necessários alguns cálculos aritméticos com vista à simplificação de uma expressão até obter a fórmula final apresentada, embora se tenha optado por omitir tais detalhes.

A tabela seguinte permite identificar:

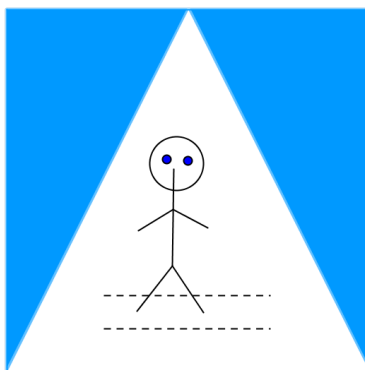
- o livro escolar de onde foram retirados ou adaptados os problemas, incluindo a página e número do exercício escolhido;
- em que ano de escolaridade podem ser propostas cada uma das resoluções;
- em que ano de escolaridade podem ser abordadas as variantes ou provas sem palavras, aqui numeradas de acordo com a posição que ocupam na subsecção em que se encontram;
- três níveis de desempenho dos exercícios; os que não se encontram assinalados com asteriscos correspondem a um nível de desempenho regular, identificando-se com um ou dois asteriscos os que correspondem a níveis de desempenho progressivamente mais avançados.

Problema	Baseado em	Resolução proposta	Variantes sem palavras
1	[8, pág. 45, ex. 23]	1, 2 → 7.º ano 3 → 5.º ano	5.º ano
2	[21, pág. 23/26, ex. 4/6]	1 → 8.º ano 2(a) → 3.º ano 2(b) → 7.º ano	1, 2*, 3*, 4** → 3.º ano 5 → 8.º ano
3	[21, pág. 32, ex. 10]	1 → 7.º ano 2 → 5.º ano	1, 3*, 4* → 5.º ano 2 → 3.º ano
4	[21, pág. 32, ex. 10]	1 → 7.º ano 2 → 5.º ano	1*, 2*, 3, 4* → 5.º ano 5, 6*, 7* → 6.º ano
5	[21, pág. 49, ex. 10]	1* → 7.º ano 2 → 5.º ano	1, 2, 3*, 4** → 7.º ano
6	[21, pág. 46, ex. 5]	1* → 8.º ano 2 → 3.º ano	1, 2, 3, 4, 5*, 6** → 3.º ano
7	[9, pág. 197, ex. 47]	1* → 8.º ano 2 → 5.º ano	1, 2*, 3* → 5.º ano
8	[21, pág. 48, ex. 1]	1 → 5.º ano 2 → 3.º ano	7.º ano

2.1 Passadeira - triângulo e quadrado

Problema 1

A Maria pintou um sinal de trânsito com a forma de um quadrado com 2116 cm^2 de área.



Qual é a área da parte colorida de azul na figura? Explique a sua resposta.

Na tabela seguinte apresentam-se os principais pré-requisitos necessários para a resolução deste problema.

Proposta de resolução	Pré-requisitos
1	Raiz quadrada; área do quadrado; área do triângulo
2	Área do quadrado; área do triângulo
3	Diagonal de um retângulo; noção de área; figuras equivalentes

Proposta de Resolução 1

Seja l a medida do lado do quadrado que forma o sinal de trânsito. Como a sua área é $l^2 = 2116 \text{ cm}^2$, então

$$l = \sqrt{2116} = 46 \text{ cm}.$$

Calculamos agora a área dos triângulos da figura coloridos de azul. Ambos têm altura de medida l e base de medida metade de l . Cada triângulo têm área igual a

$$\frac{23 \times 46}{2} = \frac{1058}{2} \text{ cm}^2.$$

Assim, a área da região azul do sinal de trânsito é igual à soma das áreas dos triângulos coloridos de azul, ou seja, o dobro da área anteriormente obtida, 1058 cm^2 .

Proposta de Resolução 2

A área do quadrado que forma o sinal de trânsito é dada por

$$A_Q = 2116 \text{ cm}^2.$$

O triângulo branco da figura tem base e altura coincidentes com a medida l do lado do quadrado, logo a sua área,

$$A_T = \frac{l \times l}{2},$$

é metade da área do quadrado,

$$A_T = \frac{A_Q}{2} = 1058 \text{ cm}^2.$$

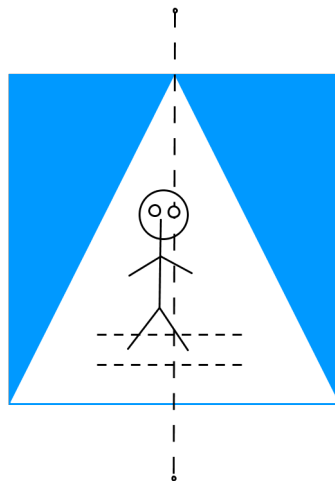
A diferença entre as áreas,

$$A_Q - A_T = 2116 - 1058 = 1058 \text{ cm}^2$$

é a área da parte azul da figura.

Proposta de Resolução 3

Como a figura abaixo sugere, a reta que passa no ponto médio de dois lados opostos do quadrado divide-o em dois retângulos congruentes (ou geometricamente iguais).

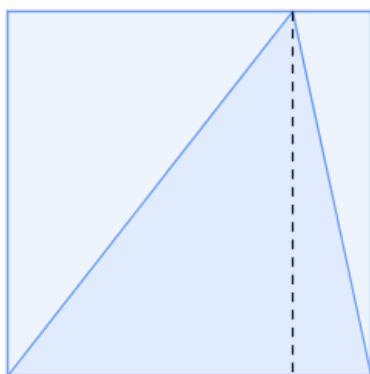
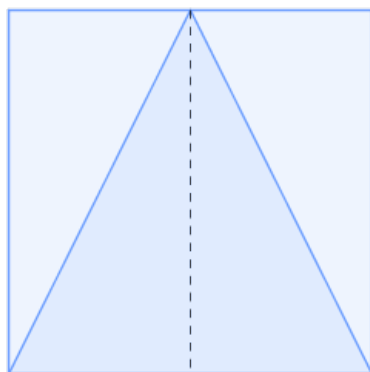
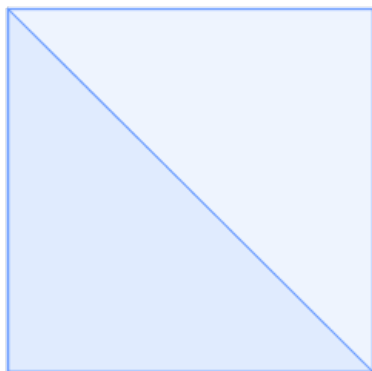


Por sua vez, a diagonal de um retângulo divide-o em dois triângulos congruentes.

Podemos, assim, concluir que a área da parte azul no sinal de trânsito coincide com metade da área do quadrado, isto é, 1058 cm^2 .

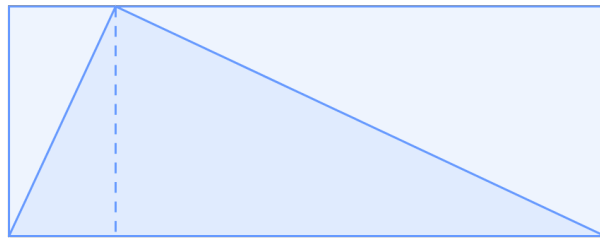
2.1.1 Provas sem palavras - Área do triângulo

Observam-se primeiramente triângulos que partilham a base com o quadrado que os contém.

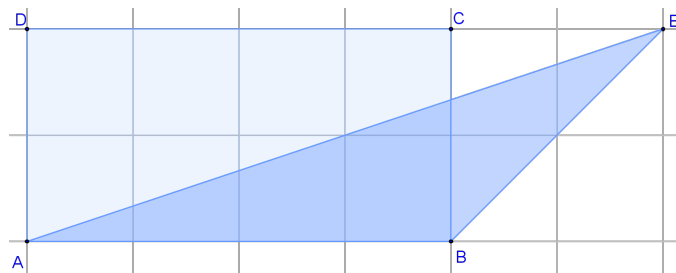


$$\text{Área do triângulo} = \frac{\text{Área do quadrado}}{2}$$

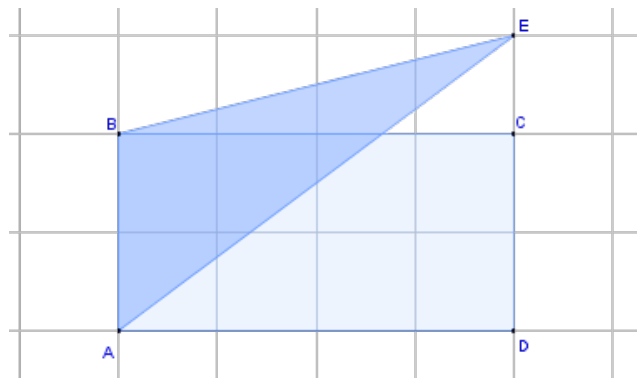
Mais geralmente, comparam-se áreas de triângulos e retângulos com a mesma base e altura.



$$\text{Área do triângulo} = \frac{\text{Área do retângulo}}{2}$$



$$\text{Área do triângulo} = \frac{A_{[ABCD]}}{2} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AD}}{2}.$$



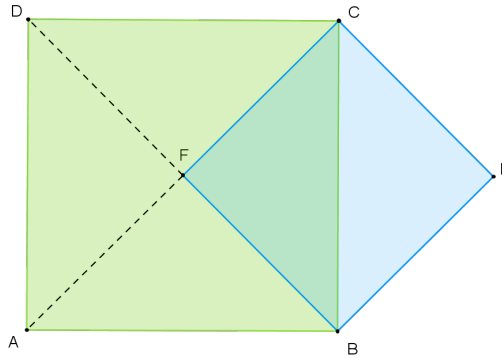
Observamos que ao deslocar o vértice oposto à base sobre a reta paralela à base, não se altera a área do triângulo, obtendo-se assim a fórmula genérica:

$$\text{Área do triângulo} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}.$$

2.2 Dois quadrados parcialmente sobrepostos

Problema 2

Na figura estão representados dois quadrados, $[ABCD]$ e $[BECF]$.



Sabemos que a área do quadrado $[ABCD]$ é 5 cm^2 .

(a) De entre as seguintes quatro opções de resposta, escolha a única correta.

A área do quadrado $[BECF]$ em cm^2 é igual a

- A. 2; B. $\sqrt{5}$; C. $\frac{5}{2}$; D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(b) Determine o perímetro do quadrado $[BECF]$.

Na tabela seguinte, apresentam-se os principais pré-requisitos necessários para a resolução deste problema.

Proposta de resolução	Pré-requisitos
1 (a) (b)	Teorema de Pitágoras; área do quadrado. Teorema de Pitágoras; raiz quadrada; área e perímetro do quadrado.
2 (a) (b)	Triângulo congruentes; figuras equivalentes; área do quadrado. Área e perímetro do quadrado; raiz quadrada.

Proposta de Resolução 1

(a) Pelo Teorema de Pitágoras, aplicado ao triângulo retângulo $[ABF]$, tem-se

$$\overline{AB}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FB}^2.$$

Como os catetos do triângulo $[ABF]$ têm igual comprimento, $\overline{AF} = \overline{FB}$, então $\overline{AB}^2 = 2 \overline{FB}^2$. A área do quadrado $[BECF]$ é dada por

$$\overline{FB}^2 = \frac{\overline{AB}^2}{2} = \frac{5}{2} \text{ cm}^2,$$

pois a área do quadrado $[ABCD]$ é 5 cm^2 . A resposta correta é a opção C.

(b) Pelo Teorema de Pitágoras, aplicado ao triângulo retângulo $[ABC]$, tem-se

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2.$$

Como $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 = 5 \text{ cm}$, então

$$\overline{AC}^2 = 10 \xrightarrow[\text{AC} > 0]{\text{AC}^2 > 0} \overline{AC} = \sqrt{10} \text{ cm}.$$

Como $\overline{AC} = 2\overline{FC}$, então o perímetro do quadrado $[BECF]$ é dado por

$$P_{[BECF]} = 4\overline{FC} = 2\overline{AC} = 2\sqrt{10} \text{ cm}.$$

Proposta de Resolução 2

(a) O quadrado $[BECF]$ decompõe-se em dois triângulos congruentes, $[BCF]$ e $[BEC]$, logo a sua área é igual a

$$A_{[BECF]} = 2 A_{[BCF]}.$$

O quadrado $[ABCD]$ decompõe-se em quatro triângulos congruentes, um dos quais $[BCF]$, logo

$$A_{[ABCD]} = 4 A_{[BCF]}.$$

Conclui-se que

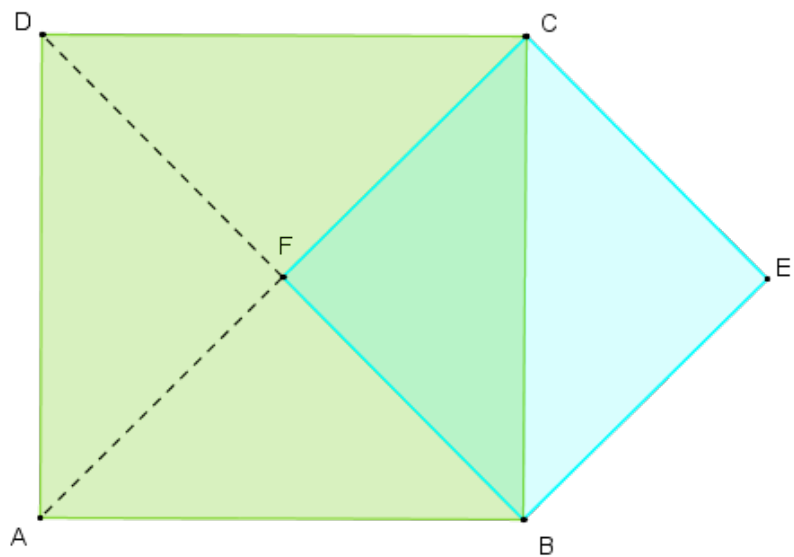
$$A_{[BECF]} = \frac{A_{[ABCD]}}{2} = \frac{5}{2} \text{ cm}^2,$$

ou seja, a resposta correta é a opção C.

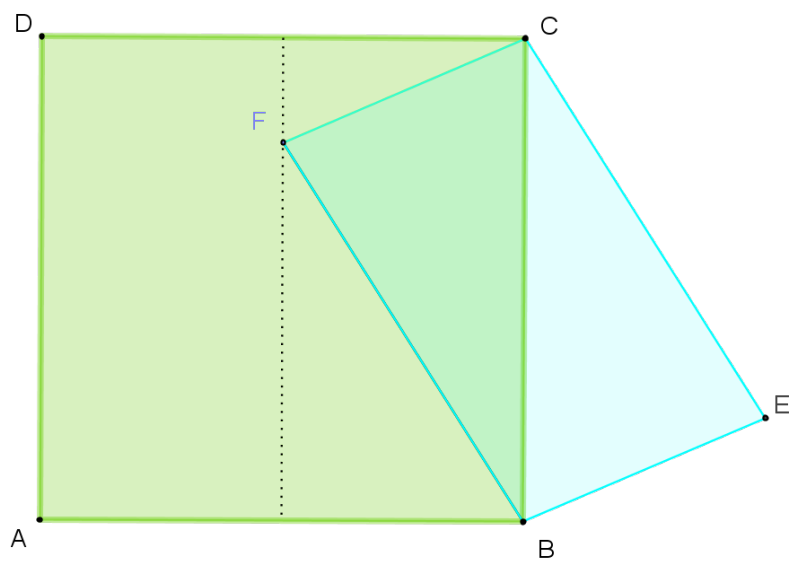
(b) Pela alínea anterior, sabemos que o quadrado $[BECF]$ tem área dada por $l^2 = 5/2 \text{ cm}^2$, em que l é a medida do seu lado. Então o seu perímetro é igual a

$$P_{[BECF]} = 4l = 4 \times \sqrt{5/2} = 4 \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = 4 \times \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 2\sqrt{10} \text{ cm}.$$

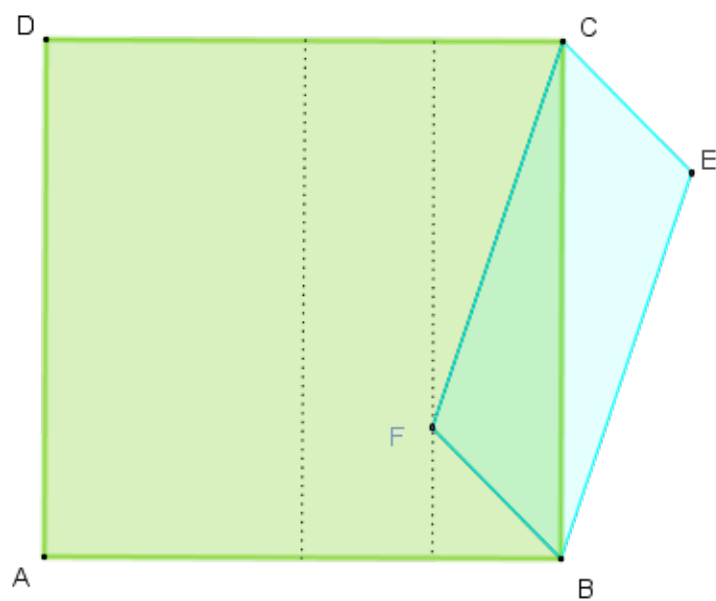
2.2.1 Variantes sem palavras - Comparando áreas de quadriláteros



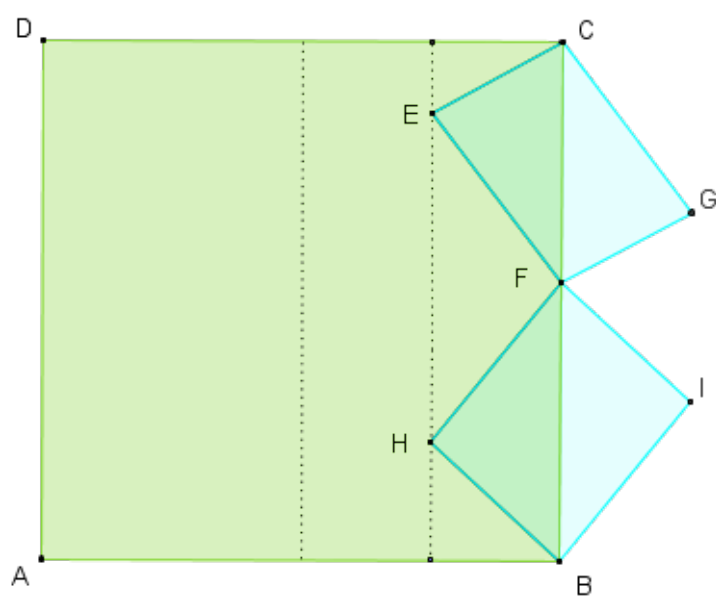
$$\text{Área}_{[CEBF]} = \frac{1}{2} \text{Área}_{[ABCD]}$$



$$\text{Área}_{[CEBF]} = \frac{1}{2} \text{Área}_{[ABCD]}$$



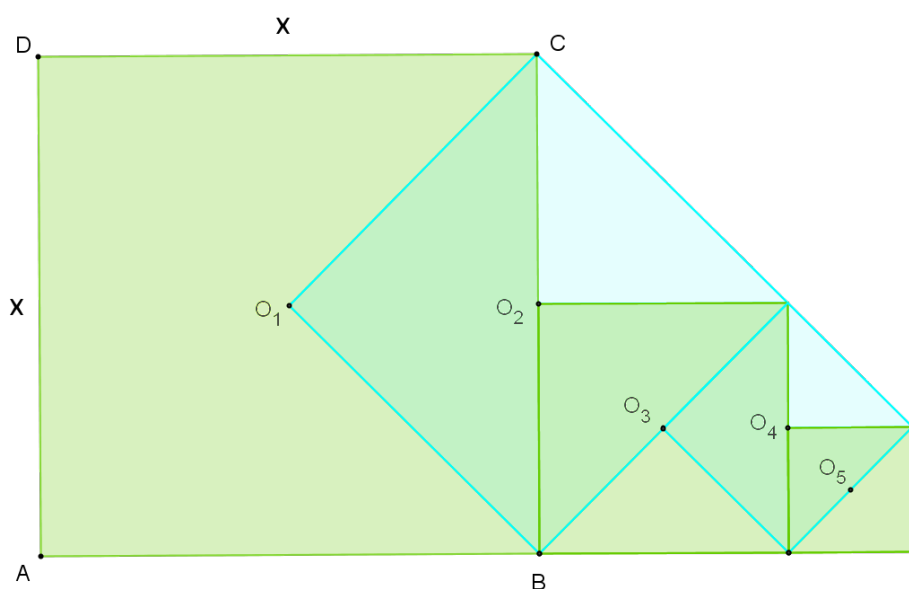
$$\text{Área}_{[CEF]} = \frac{1}{4} \text{Área}_{[ABCD]}$$



$$\text{Área}_{[EFG]} + \text{Área}_{[HBF]} = \frac{1}{4} \text{Área}_{[ABCD]}$$

2.2.2 Provas sem palavras - Perímetro e área de quadrados sobrepostos

Na próxima imagem, observa-se uma sequência de quadrados sobrepostos e listam-se perímetros e áreas destes quadrados na tabela subsequente.

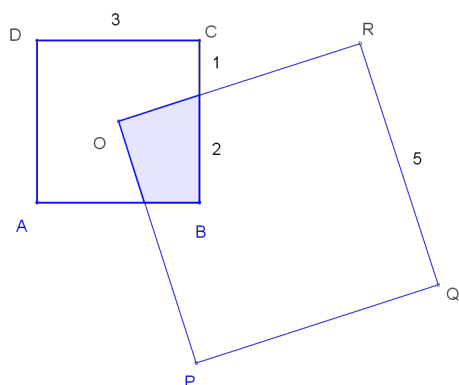


Centro do quadrado	Lado	Perímetro	Área
O_1	x	$4x$	x^2
O_2	$\frac{\sqrt{2}}{2}x$	$2\sqrt{2}x$	$\frac{1}{2}x^2$
O_3	$\frac{1}{2}x$	$2x$	$\frac{1}{4}x^2$
O_4	$\frac{\sqrt{2}}{4}x$	$\sqrt{2}x$	$\frac{1}{8}x^2$
O_5	$\frac{1}{4}x$	x	$\frac{1}{16}x^2$
...
O_n	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}x$	$4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}x$	$\frac{1}{2^{n-1}}x^2$

2.3 Quadrilátero como interseção de dois quadrados

Problema 3

Observe a figura onde as medidas dos lados assinalados estão em centímetros.



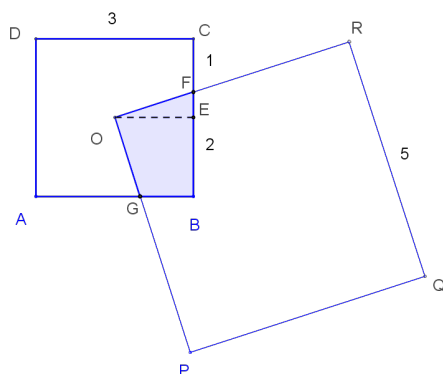
O vértice O é o centro do quadrado $[ABCD]$ que tem 3 cm de lado. O quadrado $[OPQR]$ tem 5 cm de lado. Calcule a área da região colorida a azul na figura.

Na tabela seguinte apresentam-se os principais pré-requisitos para resolver este problema.

Proposta de resolução	Pré-requisitos
1	Área do triângulo; área do trapézio.
2	Retas perpendiculares; noção de área; quadriláteros geometricamente iguais; figuras equivalentes.

Proposta de Resolução 1

Atendendo à figura, observa-se que a região colorida é delimitada pelo quadrilátero $[BFOG]$.



O quadrilátero $[BFOG]$ pode decompor-se no triângulo $[OEF]$ e no trapézio $[BEOG]$. Como

$$\overline{OE} = \overline{BE} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 1,5 \text{ cm} \quad \text{e} \quad \overline{BE} + \overline{EF} = 2 \text{ cm},$$

então $\overline{EF} = 0,5 \text{ cm}$. Obtemos as seguintes áreas,

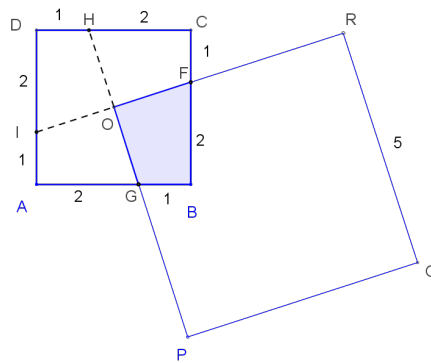
$$\begin{aligned} A_{[OEF]} &= \frac{\overline{OE} \times \overline{EF}}{2} = \frac{1,5 \times 0,5}{2} = 0,375 \text{ cm}^2, \\ A_{[BEOG]} &= \frac{\overline{OE} + \overline{GB}}{2} \times 1,5 = \frac{1,5 + 1}{2} \times 1,5 = 1,875 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

A região colorida a azul tem área total igual a

$$\begin{aligned} A_{\text{colorida}} &= A_{[OEF]} + A_{[BEOG]} \\ &= 0,375 + 1,875 \\ &= 2,25 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Proposta de Resolução 2

O ponto O é o centro do quadrado $[ABCD]$. Os pontos I, O e F são colineares. Os pontos G, O e H também se encontram sobre uma mesma reta.



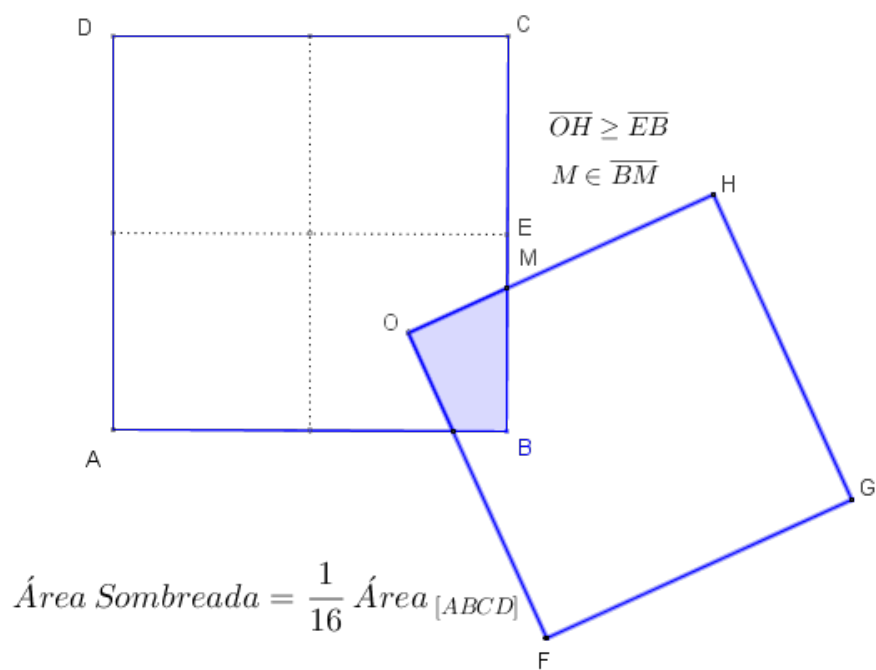
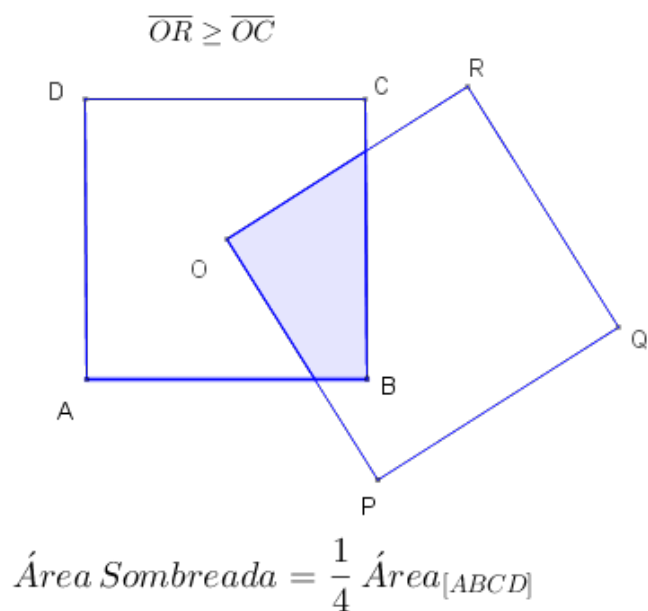
As retas OF e OG contêm dois lados consecutivos do quadrado $[OPQR]$, logo são perpendiculares. Assim $\overline{OG} = \overline{OH}$ e $\overline{OI} = \overline{OF}$. Podemos ainda verificar que

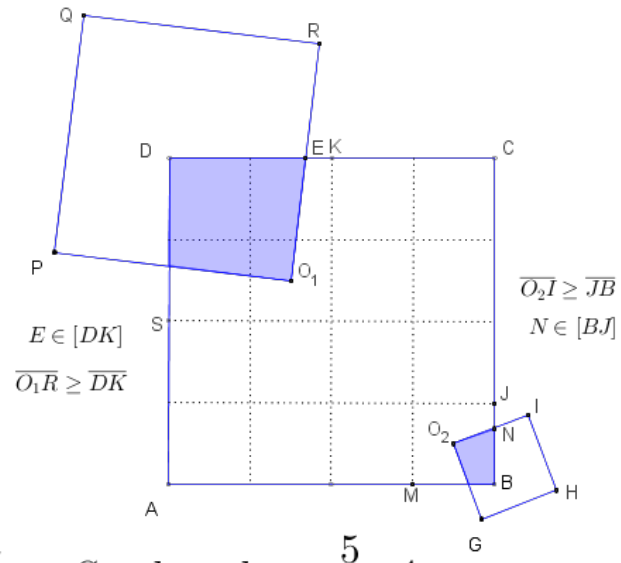
$$\overline{GB} = \overline{FC} = \overline{HD} = \overline{IA} = 1 \text{ cm} \quad \text{e} \quad \overline{BF} = \overline{CH} = \overline{DI} = \overline{AG} = 2 \text{ cm}.$$

Então os segmentos de reta $[GH]$ e $[IF]$ dividem o quadrado $[ABCD]$ em quatro quadriláteros congruentes (ou geometricamente iguais). Assim, a área do quadrilátero $[BFOG]$ que define a região azul é

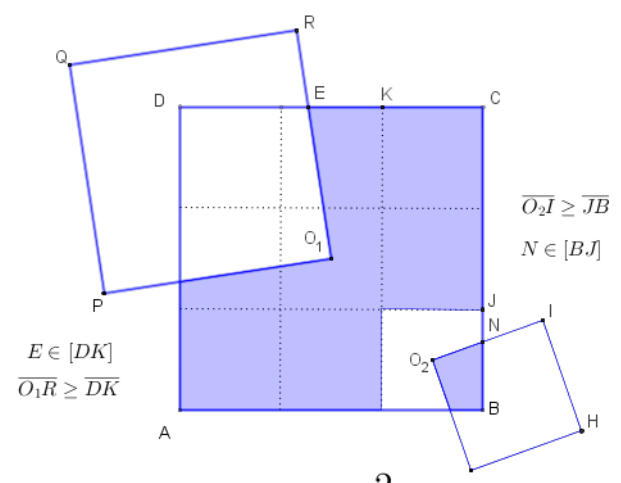
$$A_{\text{colorida}} = \frac{1}{4} A_{[ABCD]} = \frac{1}{4} \overline{AB}^2 = \frac{9}{4} = 2,25 \text{ cm}^2.$$

2.3.1 Variantes sem palavras - Decompondo quadrados em quadriláteros





$$\text{Área Sombreada} = \frac{5}{32} A_{[ABCD]}$$

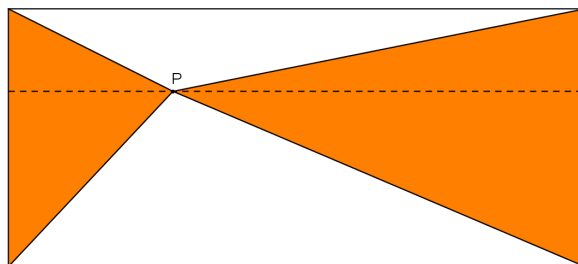


$$\text{Área Sombreada} = \frac{2}{3} A_{[ABCD]}$$

2.4 Ponto dentro do retângulo

Problema 4

Considere um retângulo qualquer e P um ponto do seu interior.



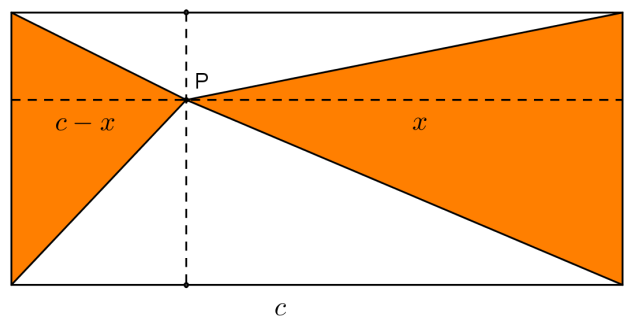
Prove que, qualquer que seja o ponto P , a área da parte colorida a vermelho é igual à área da parte não colorida.

Na tabela seguinte, apresentam-se os pré-requisitos fundamentais necessários para a resolução deste problema.

Proposta de resolução	Pré-requisitos
1	Área do triângulo.
2	Retas perpendiculares; diagonal do retângulo; noção de área; triângulos congruentes; figuras equivalentes.

Proposta de Resolução 1

Suponhamos como indica a figura abaixo que as medidas dos lados do retângulo são l e c .



Qualquer que seja o ponto P no interior do retângulo, se x é a altura, relativa à base de medida l , de um dos triângulos vermelhos da figura com vértice P , então $c - x$ é a altura, relativa à base com a mesma medida l , do outro triângulo vermelho com vértice P .

Calculamos a área da região colorida de vermelho, mediante a soma das áreas dos dois triângulos coloridos:

$$A_{colorida} = \frac{l \times (c - x)}{2} + \frac{l \times x}{2} = \frac{lc}{2}.$$

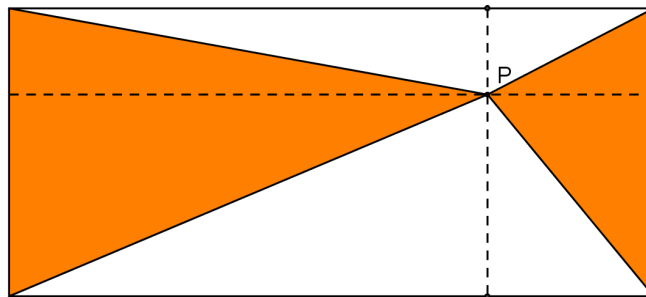
A área da região não colorida é a diferença entre a área total do retângulo, lc , e a área da região colorida:

$$A_{não\ colorida} = lc - \frac{lc}{2} = \frac{lc}{2}.$$

Logo, para qualquer ponto P no interior do retângulo, a área da parte colorida é igual à área da parte não colorida.

Proposta de Resolução 2

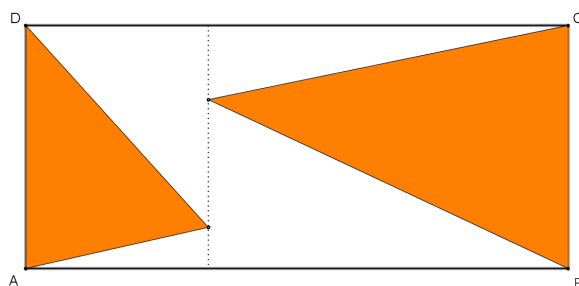
Qualquer que seja o ponto P no interior do retângulo, mediante dois segmentos de reta perpendiculares entre si e paralelos aos lados do retângulo, intersecando-se no ponto P , podemos dividi-lo em quatro retângulos, como sugerido pela imagem seguinte.



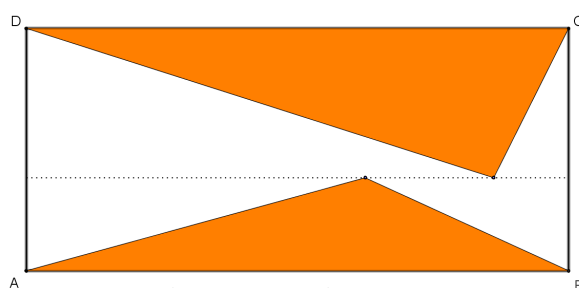
Sabemos que a diagonal de um retângulo divide-o em dois triângulos congruentes (ou geometricamente iguais). Aplicando a propriedade anterior a cada um dos quatro retângulos, ficamos com a figura dividida em oito triângulos, de tal modo que cada retângulo contém um triângulo colorido e um triângulo não colorido congruentes.

Portanto, qualquer que seja o ponto P no interior do retângulo que se escolha para vértice dos triângulos em que o retângulo se decompõe, é evidente que a área colorida de vermelho no retângulo é igual à área não colorida.

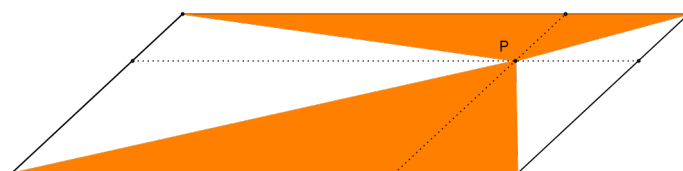
2.4.1 Variantes sem palavras - Triângulos equivalentes em quadriláteros



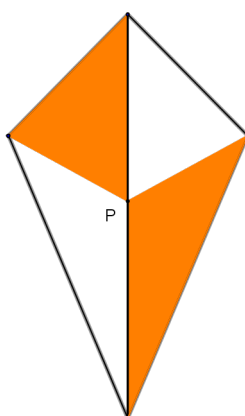
$$A_{Colorida} = A_{N\tilde{a}o\ colorida}$$



$$A_{Colorida} = A_{N\tilde{a}o\ colorida}$$

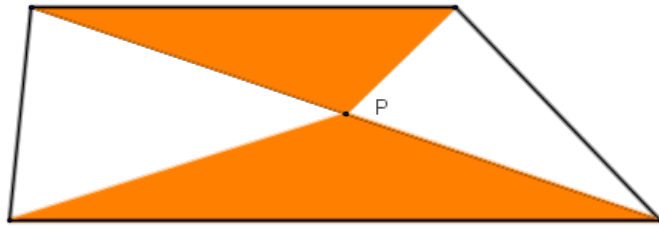


$$A_{Colorida} = A_{N\tilde{a}o\ colorida}$$



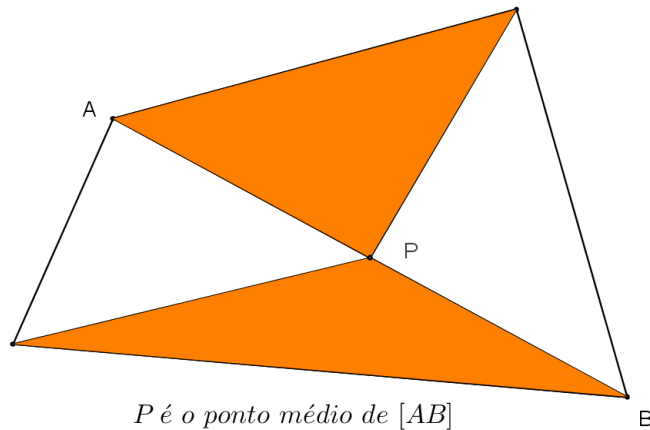
P é um ponto que pertence à diagonal maior do papagaio

$$A_{Colorida} = A_{N\tilde{a}o\ colorida}$$



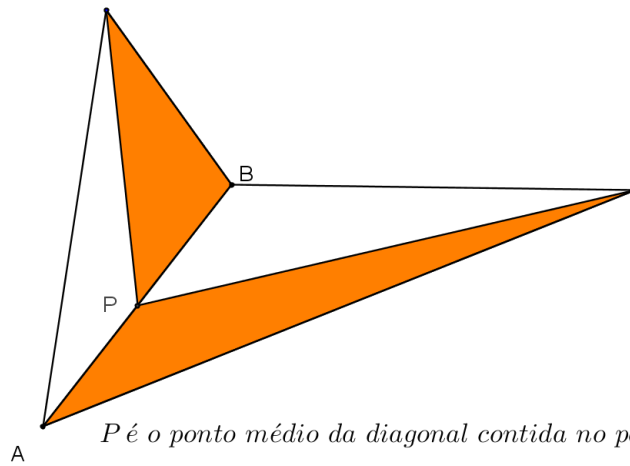
P é o ponto médio de uma das diagonais do trapézio

$$A_{Colorida} = A_{Não\ colorida}$$



P é o ponto médio de [AB]

$$A_{Colorida} = A_{Não\ colorida}$$



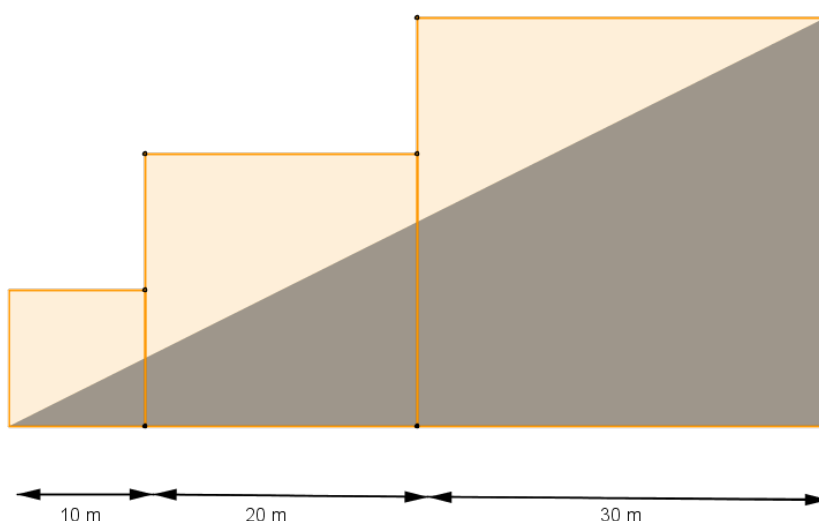
P é o ponto médio da diagonal contida no polígono

$$A_{Colorida} = A_{Não\ colorida}$$

2.5 Parede com três quadrados e um triângulo

Problema 6

A figura seguinte representa a parede de um prédio formada por três quadrados.



Parte da parede foi colorida a amarelo e outra parte a cinzento.

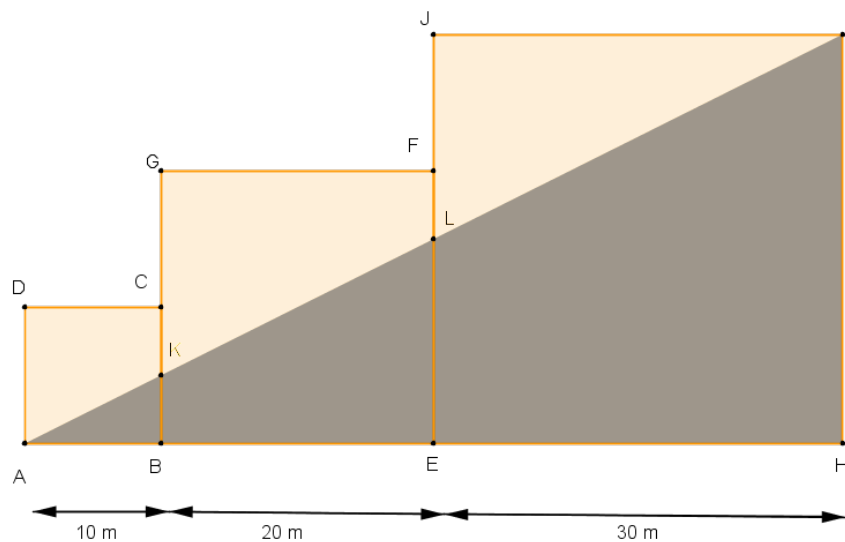
Calcule a área da parte colorida a amarelo.

Incluem-se na próxima tabela os principais pré-requisitos necessários para as resoluções propostas para o problema.

Proposta de resolução	Pré-requisitos
1	Semelhança de triângulos; área do triângulo; área do trapézio.
2	Área do quadrado; área do triângulo.

Proposta de Resolução 1

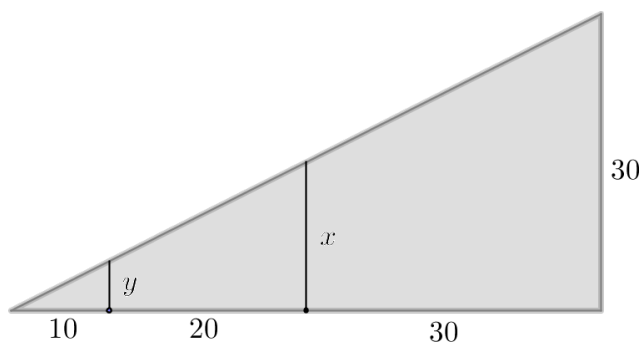
Na próxima figura, atribuem-se letras de A a J aos vértices dos quadrados que formam a parede do prédio e K, L aos pontos de interseção entre os lados dos quadrados e a hipotenusa do triângulo colorido de cinzento.



Consideram-se as medidas

$$x = \overline{EL} \quad \text{e} \quad y = \overline{BK},$$

destacadas na figura abaixo.



Por semelhança de triângulos, temos que

$$\frac{60}{30} = \frac{30}{x} = \frac{10}{y}.$$

Portanto, obtém-se $x = 15$ e $y = 5$, donde resultam

$$\overline{JL} = 30 - x = 15,$$

$$\overline{GK} = 20 - y = 15,$$

$$\overline{FL} = 20 - x = 5,$$

$$\overline{CK} = 10 - y = 5.$$

Consequentemente, obtemos as seguintes áreas do triângulo e trapézios que definem a região pintada de amarelo:

$$\begin{aligned} A_{[IJL]} &= \frac{15 \times 30}{2} = 225 \text{ m}^2, \\ A_{[GFLK]} &= \frac{10+5}{2} \times 10 = 75 \text{ m}^2, \\ A_{[AKCD]} &= \frac{15+5}{2} \times 20 = 200 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

A área da parte amarela do prédio é assim dada por

$$\begin{aligned} A_{\text{amarela}} &= A_{[IJL]} + A_{[GFLK]} + A_{[AKCD]} \\ &= 225 + 75 + 200 \\ &= 500 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

Proposta de Resolução 2

Em alternativa, podemos calcular a área do triângulo que delimita a região cinzenta:

$$\begin{aligned} A_{\text{cinzenta}} &= \frac{(10 + 20 + 30) \times 30}{2} \\ &= 900 \text{ m}^2, \end{aligned}$$

bem como a área total da parede do prédio que é a soma das áreas dos três quadrados:

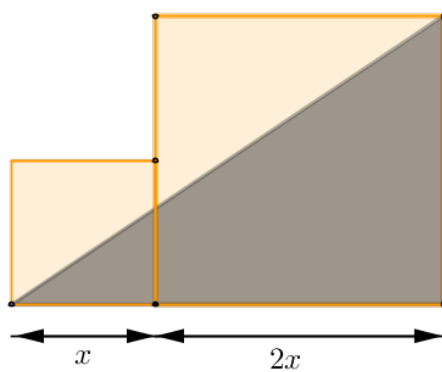
$$\begin{aligned} A_{\text{total}} &= A_{[ABCD]} + A_{[BEFG]} + A_{[EHIJ]} \\ &= 10^2 + 20^2 + 30^2 \\ &= 1400 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

Podemos então concluir que a área da parte pintada de amarelo é igual a

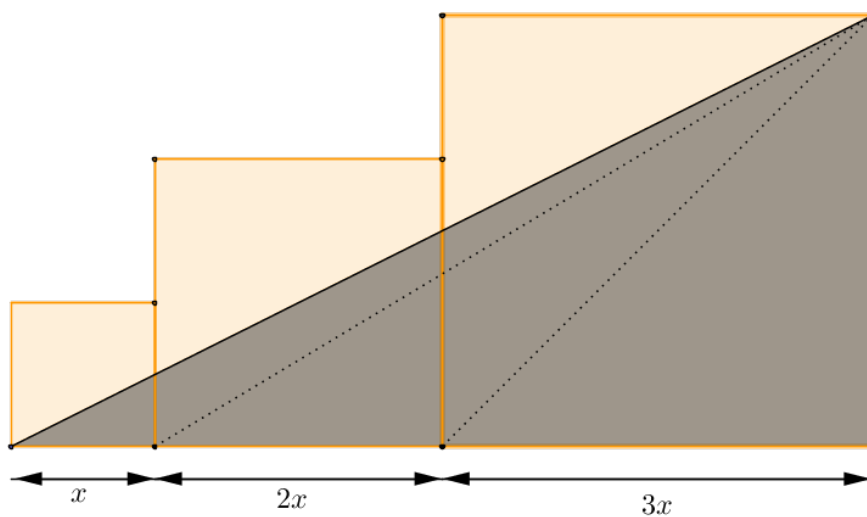
$$\begin{aligned} A_{\text{amarela}} &= A_{\text{total}} - A_{\text{cinzenta}} \\ &= 1400 - 900 \\ &= 500 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

2.5.1 Variantes sem palavras - Áreas de triângulos, quadrados e trapézios

$$\text{Área da parte mais clara} = 2x^2$$

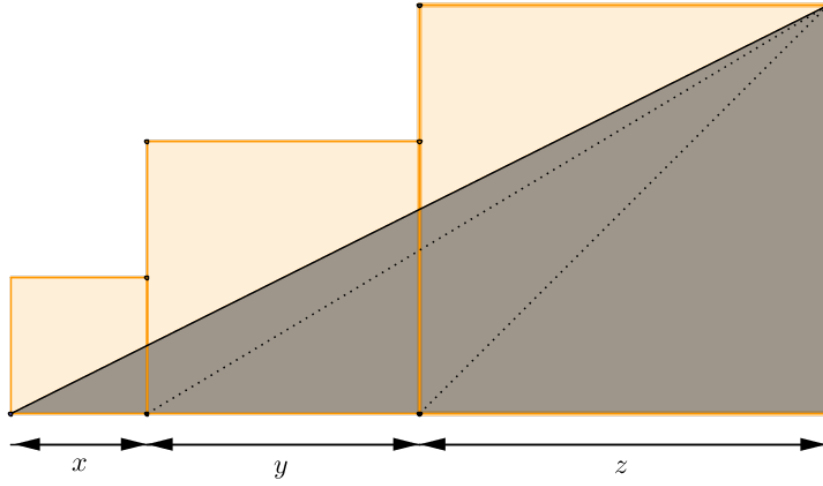


$$\text{Área da parte mais clara} = 5x^2$$



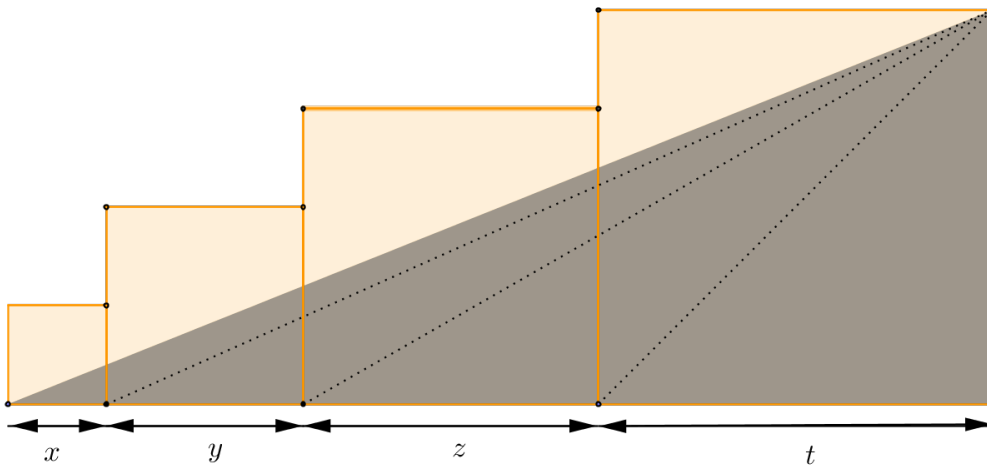
$$x < y < z \quad , \quad z \leq 2y \leq 4x$$

$$\text{Área da parte mais clara} = x^2 + y^2 + \frac{z^2}{2} - \frac{xz}{2} - \frac{yz}{2}$$



$$x < y < z < t \quad , \quad t \leq 2z \leq 4y \leq 8x$$

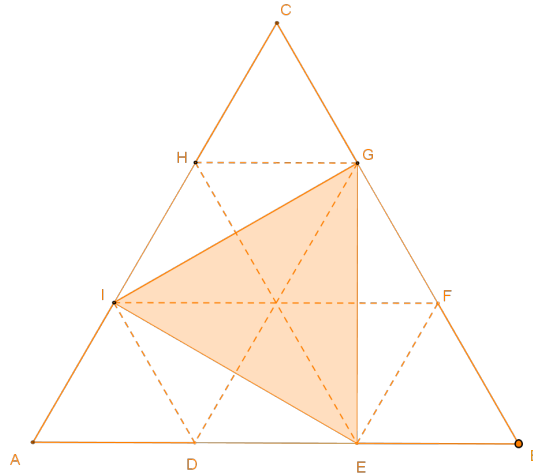
$$\text{Área da parte mais clara} = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{t^2}{2} - \frac{xt}{2} - \frac{yt}{2} - \frac{zt}{2}$$



2.6 Triângulo dentro de triângulo

Problema 6

Considere o triângulo $[ABC]$, equilátero, subdividido em 9 triângulos equiláteros.



Qual das seguintes afirmações é correta?

- (A) $A_{[ABC]} = 2 A_{[EGI]}$; (C) $A_{[ABC]} = 3 A_{[EGI]}$;
 (B) $A_{[ABC]} = 6 A_{[ADI]}$; (D) $A_{[ADI]} = \frac{1}{2} A_{[EGI]}$.

Na tabela seguinte, apresentam-se os principais pré-requisitos necessários para a resolução deste problema.

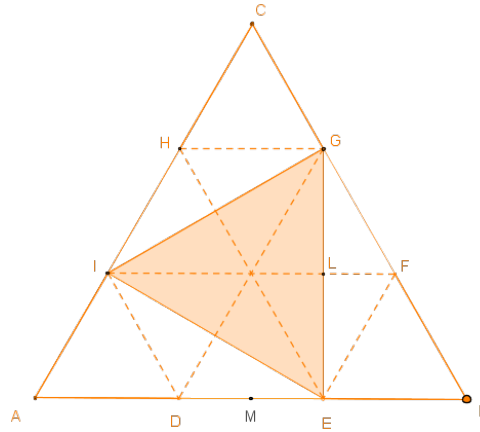
Proposta de resolução	Pré-requisitos
1	Teorema de Pitágoras; semelhança de triângulos; área do triângulo; área do trapézio.
2	Área do quadrado; área do triângulo.

Proposta de Resolução 1

O triângulo $[EBG]$ é retângulo em E . Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\overline{BG}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{EG}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{2}{3}\overline{AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\overline{AB}\right)^2 + \overline{EG}^2$$

$$\overline{EG} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{EG} = \frac{\sqrt{3}}{3} \overline{AB}.$$



Seja L o ponto médio do segmento $[EG]$ e M o ponto médio do segmento $[DE]$. Assim $\overline{IL} = \overline{AM}$ e \overline{IL} é metade de \overline{AB} . Logo

$$A_{[EIG]} = \frac{\overline{EG} \times \overline{IL}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \overline{AB} \times \frac{1}{2} \overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12} \overline{AB}^2.$$

Além disso, se M é o ponto médio do segmento $[AB]$, então $[AMC]$ é um triângulo retângulo em M . Pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$\begin{aligned} \overline{MC}^2 + \overline{AM}^2 &= \overline{AB}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{MC}^2 + \left(\frac{1}{2}\overline{AB}\right)^2 = \overline{AB}^2 \\ \overline{MC} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{MC} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AB}. \end{aligned}$$

Logo

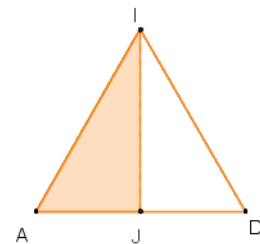
$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \overline{AB}^2 = 3A_{[EGI]}$$

e a resposta correta é a opção (C).

Proposta de Resolução 2

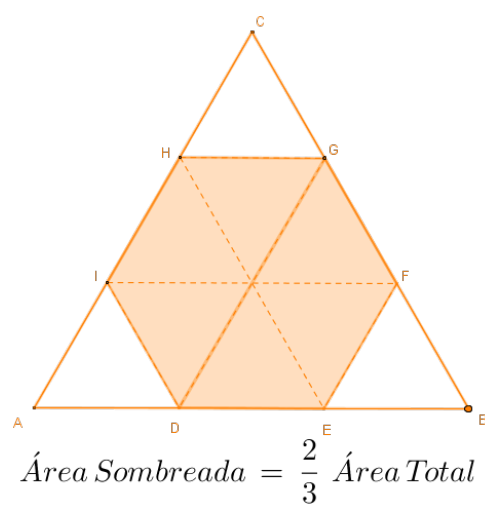
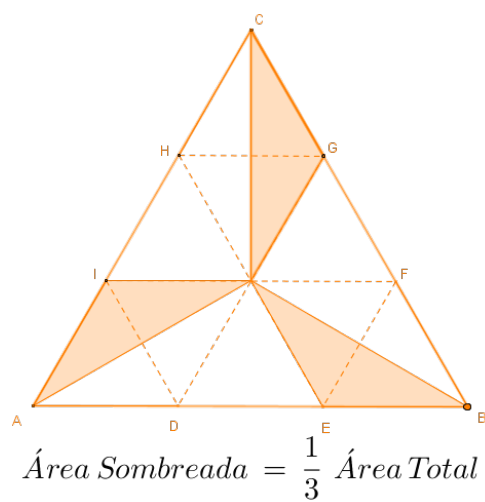
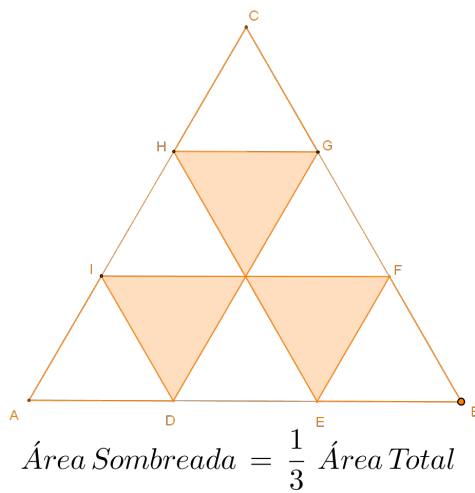
Sabe-se que a altura de um triângulo equilátero divide-o em dois triângulos com a mesma área. O triângulo $[EGI]$ divide seis triângulos equiláteros congruentes a $[ADI]$ em doze triângulos com metade da área. É claro que

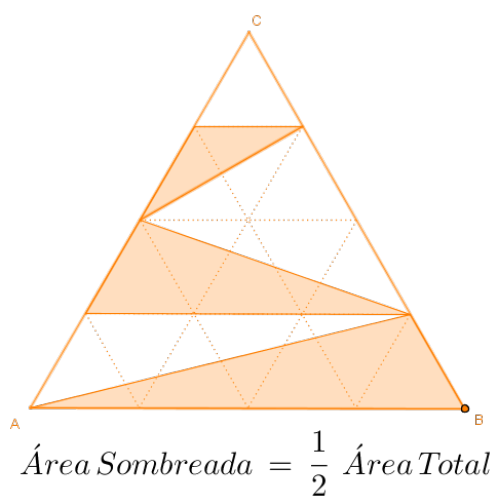
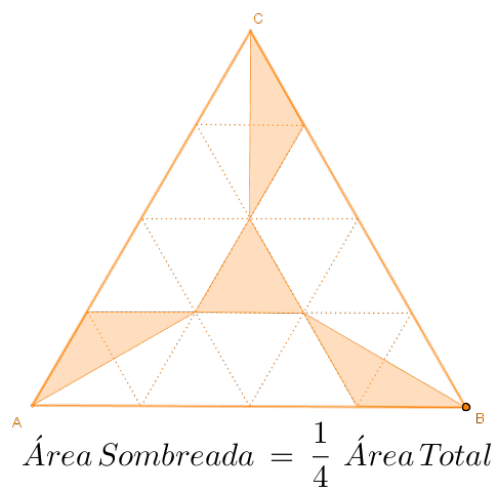
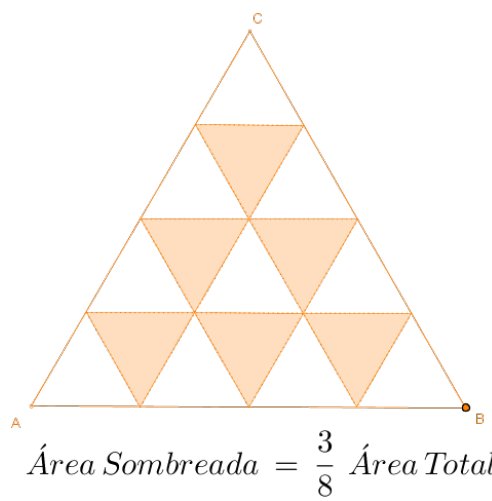
$$A_{[ABC]} = 9 A_{[AID]} \quad \text{e} \quad A_{[EGI]} = 3 A_{[AID]}.$$



Podemos concluir que $A_{[ABC]} = 3A_{[EGI]}$, isto é, (C) é a opção correta.

2.6.1 Variantes sem palavras - Triângulos equivalentes

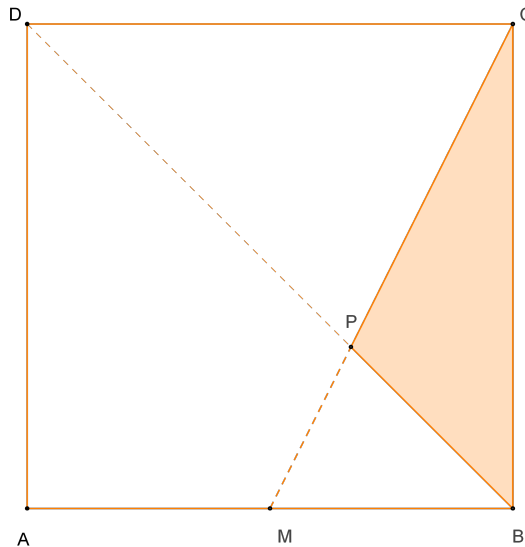




2.7 Triângulo e diagonal do quadrado

Problema 7

Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$, em que o lado mede 8 cm. Sabe-se que M é o ponto médio do segmento $[AB]$ e P é o ponto de interseção das retas MC e BD .



O objetivo é determinar a área do triângulo $[BPC]$ que se encontra colorido.

Na resolução deste problema, siga as seguintes etapas:

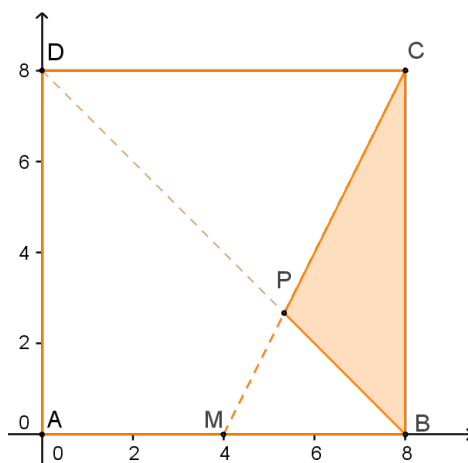
- Aplique um referencial ortogonal e monométrico à figura, com o centímetro por unidade, a origem coincidente com o vértice A e o lado $[AB]$ contido no semieixo positivo das abscissas.
- Determine, nesse referencial, as coordenadas dos vértices do quadrado $[ABCD]$ e do ponto M .
- Escreva as equações reduzidas das retas MC e BD .
- Determine as coordenadas do ponto P .
- Determine a altura do triângulo $[BPC]$ relativa ao lado $[BC]$.
- Determine a área do triângulo $[BPC]$.

Na tabela abaixo apresentam-se os principais pré-requisitos necessários para resolver o problema. Na segunda proposta de resolução, centramos a atenção no objetivo final, sem passar pelas etapas anteriores.

Proposta de resolução	Pré-requisitos
1	Referencial cartesiano; coordenadas de pontos; equação reduzida da reta; sistemas de duas equações com duas incógnitas; área do triângulo.
2	Diagonal do quadrado; área do quadrado; área do triângulo.

Proposta de Resolução 1

i. Aplicamos um referencial cartesiano ortogonal e monométrico à figura, de modo que o ponto A seja a origem do referencial, como podemos visualizar na imagem seguinte.



ii. As coordenadas dos vértices do quadrado $[ABCD]$, em relação ao referencial cartesiano fixado, são $A(0,0)$, $B(8,0)$, $C(8,8)$, $D(0,8)$ e o ponto médio de $[AB]$ tem coordenadas $M(4,0)$.

iii. As retas MC e BD têm declives

$$m_1 = \frac{8-0}{8-4} = 2 \quad \text{e} \quad m_2 = \frac{8-0}{0-8} = -1,$$

respetivamente. A equação reduzida da reta MC é da forma $y = 2x + b_1$. Substituindo as coordenadas $(4,0)$ do ponto M na equação da reta MC , obtemos o valor $b_1 = -8$ da ordenada na origem desta reta. Como D tem coordenadas $(0,8)$, então a ordenada na origem da reta

BD é $b_2 = 8$. Assim

$$y = 2x - 8 \quad \text{e} \quad y = -x + 8$$

são as equações reduzidas das retas MC e BD , respetivamente.

iv. Para determinar o ponto P de interseção das duas retas MC e BD , resolvemos o sistema

$$\begin{cases} y = 8 - x \\ y = 2x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 - x \\ 8 - x = 2x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 - x \\ 3x = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{16}{3} \\ y = \frac{8}{3} \end{cases}.$$

As coordenadas do ponto P neste referencial cartesiano são $(16/3, 8/3)$.

v. O valor da abcissa do ponto P é a altura do triângulo $[BPC]$, relativa ao lado $[BC]$, que é igual a $8/3$.

vi. A partir da base e altura, obtém-se a área do triângulo $[BPC]$:

$$A_{[BPC]} = \frac{8 \times \frac{8}{3}}{2} = \frac{64}{6} = \frac{32}{3} \text{ cm}^2.$$

Proposta de Resolução 2

Em primeiro lugar, tendo em atenção que M é o ponto médio do lado $[AB]$ e que o lado mede 8 cm, observa-se que

$$A_{[BMC]} = \frac{1}{4} A_{[ABCD]} = \frac{8^2}{4} = 16 \text{ cm}^2.$$

Por outro lado,

$$A_{[BMC]} = A_{[BPC]} + A_{[BMP]}.$$

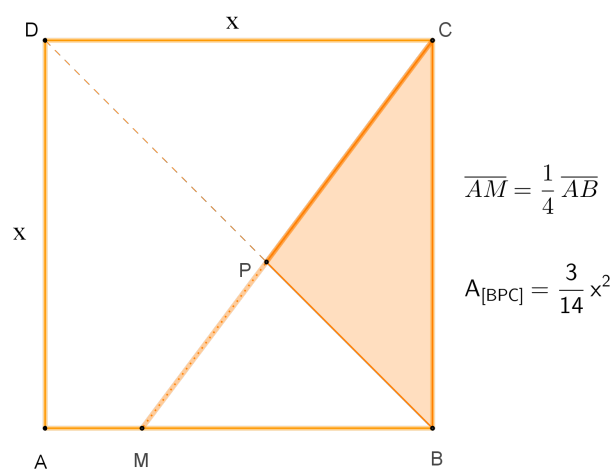
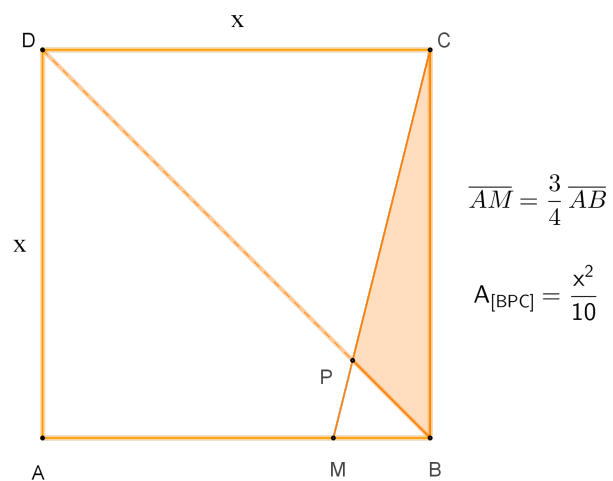
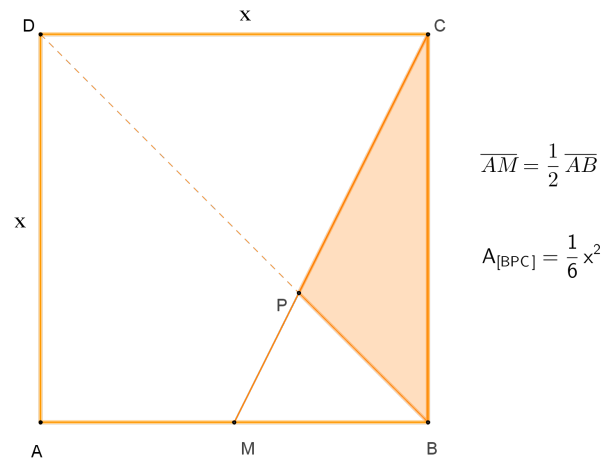
A altura dos triângulo $[BPC]$, reativa à base $[BC]$, coincide com a altura do triângulo $[MPB]$, relativa à base $[MB]$. Como \overline{MB} é metade de \overline{BC} , então a área do triângulo $[BMP]$ é metade da área do triângulo $[BPC]$. Assim,

$$A_{[BMC]} = A_{[BPC]} + \frac{1}{2} A_{[BPC]} = \frac{3}{2} A_{[BPC]}.$$

Obtém-se a área do triângulo colorida da figura inicial:

$$A_{[BPC]} = \frac{2}{3} A_{[BMC]} = \frac{2}{3} \times 16 = \frac{32}{3} \text{ cm}^2.$$

2.7.1 Variantes sem palavras - Área de triângulos com vértice na diagonal do quadrado



2.8 Relação entre áreas de quadrados

Problema 8

A área de um quadrado é x metros quadrados. Então a área de um quadrado cujo lado mede o dobro do lado do primeiro quadrado é em metros quadrados:

- A. $2x$; B. $4x$; C. $2x^2$; D. $4x^2$.

Na tabela seguinte, apresentam-se os principais pré-requisitos necessários para a resolução deste problema.

Proposta de resolução	Pré-requisitos
1	Área do quadrado; raiz quadrada; quadrado de uma raiz.
2	Área do quadrado; figuras semelhantes.

Proposta de Resolução 1

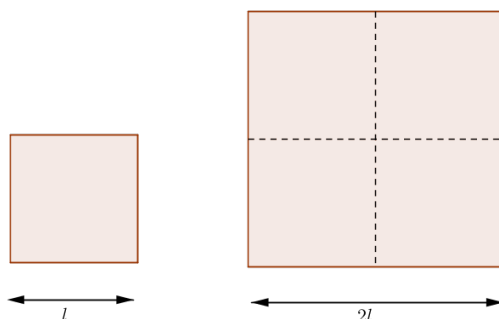
A medida do lado do quadrado de área x metros quadrados é $l = \sqrt{x}$ metros quadrados. Daqui resulta que a área do novo quadrado cujo lado mede o dobro do anterior é dada por

$$(2l)^2 = (2\sqrt{x})^2 = 4x$$

metros quadrados. A resposta correta é a opção B.

Proposta de Resolução 2

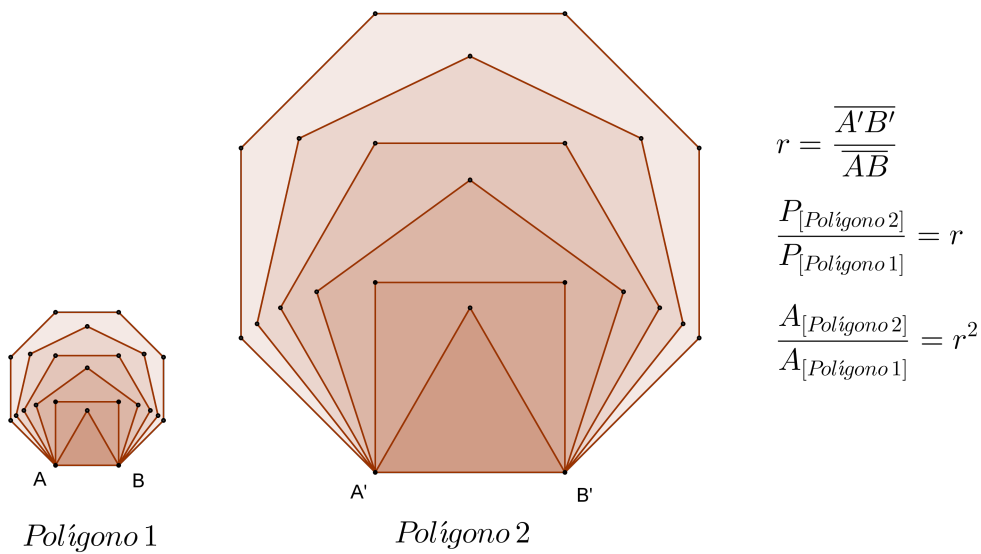
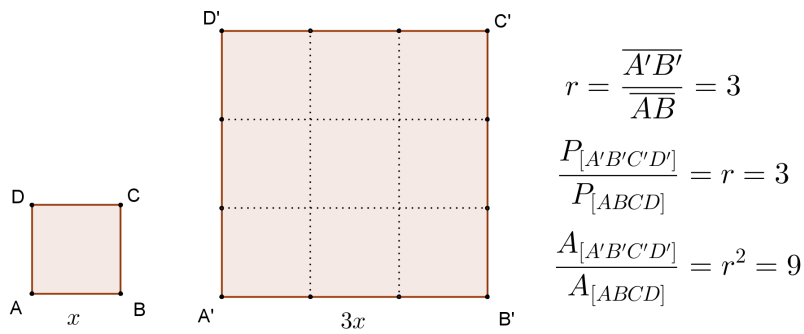
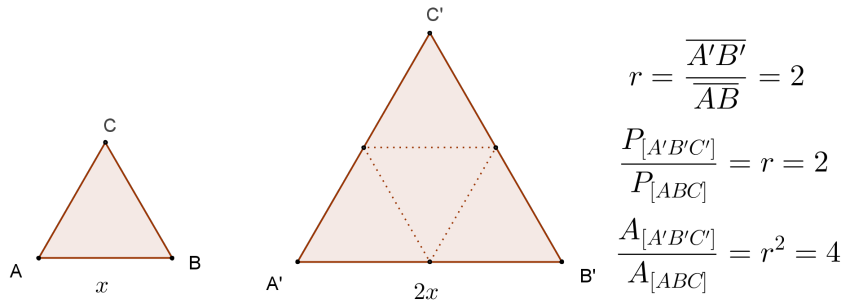
Consideremos os quadrados seguintes em que o lado do segundo mede o dobro do lado do primeiro.



Verificamos que a área do segundo quadrado é o quádruplo da área do primeiro. Logo a opção B é a resposta correta.

2.8.1 Provas sem palavras - Razão entre perímetros e áreas de figuras semelhantes

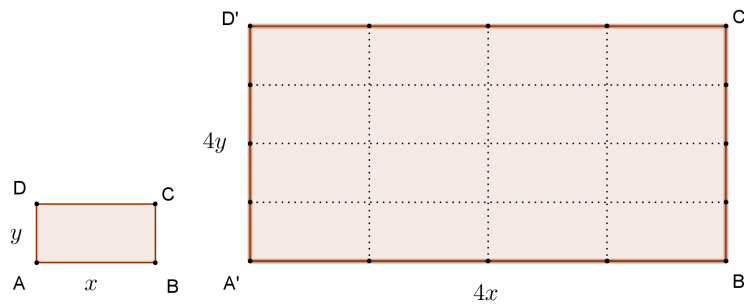
Começamos por comparar perímetros e áreas de de polígonos regulares semelhantes.



As propriedades anteriormente observadas em polígonos regulares semelhantes:

- a razão entre os perímetros coincide com a razão de semelhança, r ;
- a razão entre as áreas coincide com o quadrado da razão de semelhança, r^2 ;

estendem-se a duas quaisquer figuras semelhantes, sendo r a razão de semelhança entre elas.



$$r = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'D'}}{\overline{AD}} = 4$$

$$\frac{P_{[A'B'C'D']}}{P_{[ABCD]}} = r = 4$$

$$\frac{A_{[A'B'C'D']}}{A_{[ABCD]}} = r^2 = 16$$

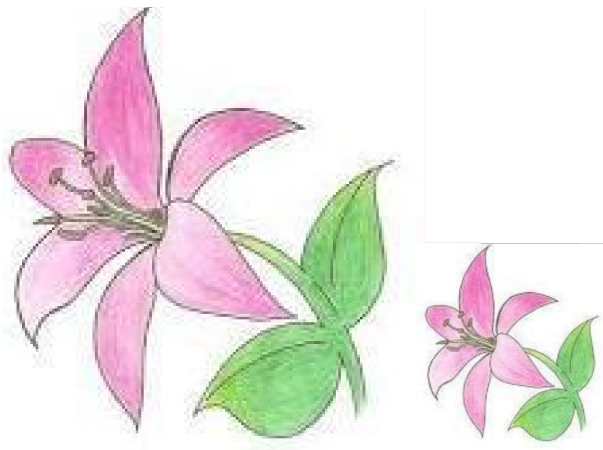


Figura 1

Figura 2

$$\frac{P_{[Figura\ 2]}}{P_{[Figura\ 1]}} = r$$

$$\frac{A_{[Figura\ 2]}}{A_{[Figura\ 1]}} = r^2$$

Capítulo 3

Problemas de Geometria no Espaço

Neste capítulo, abordam-se problemas de Geometria no Espaço Euclidiano, seguindo uma estrutura de apresentação análoga à do capítulo anterior, com diferentes propostas de resolução, seguidas de variantes sem palavras.

No Problema 1, serão objeto de estudo o volume e a área lateral de um prisma quadrangular e triangular, bem como a planificação deste sólido. Na primeira subsecção, consideram-se mais volumes de prismas e pirâmides, supondo conhecido que o volume da pirâmide é um terço do volume do prisma com a mesma base e altura.

No Problema 2, decompõe-se um cubo em seis pirâmides com vértice comum no centro do cubo e base numa das faces do cubo. Obtém-se os comprimentos das arestas, o volume e a área total de cada pirâmide em função da medida da aresta do cubo. Depois, destacam-se a diagonal facial e espacial do cubo, as medidas das arestas e altura das faces de pirâmides com diversas alturas e a mesma base, e os respectivos volumes. Relaciona-se ainda a área lateral de cada pirâmide com a área da secção do cubo que contém uma face lateral, estabelecendo-se aqui uma ligação com o Problema 4 do ponto dentro do retângulo do capítulo anterior.

No Problema 3, calcula-se o volume de um prisma hexagonal construído dentro de um cubo. Posteriormente, observam-se diversos sólidos construídos dentro do cubo e expressam-se os seus volumes em função da medida da aresta do cubo. Supomos conhecidas as fórmulas, um terço do produto da área da base pela altura, do volume do cone e, quatro terços de πr^3 , do volume da esfera de raio r . Após alguns sólidos de revolução, as esferas inscrita e circunscrita ao cubo, incluem-se três dos treze sólidos Arquimedianos, obtidos aparando sucessivamente os vértices de um cubo, pela seguinte ordem: cubo truncado, cuboctaedro, octaedro truncado e o sólido Platónico dual do cubo, o octaedro. Nem todas as expressões destes volumes são imediatas; pode ser necessário proceder a simplificações nos cálculos, mas omitimos tais detalhes. O octaedro truncado também pode ser obtido por truncatura dos vértices de um octaedro com vértices fora do primeiro cubo. Optou-se, por isso, por colocar o octaedro imediatamente antes do octaedro truncado.

Dado o grau de dificuldade deste último caso, incluímos figuras adicionais que destacam medidas das suas faces, quadrangular e hexagonal, para auxiliar na determinação da fórmula do volume deste sólido, por exemplo, retirando do volume do octaedro com vértices no exterior do cubo o volume de seis pirâmides quadrangulares.

No Problema 4, estabelece-se a relação entre os volumes de dois cubos semelhantes a partir da razão de semelhança entre o comprimento das suas arestas.

No Problema 5, envolvendo uma vela em forma de pirâmide de base quadrangular, e no Problema 6, onde se constrói um sólido através da rotação de um triângulo em torno de um eixo, trabalha-se a semelhança de triângulos, a relação entre perímetros e áreas de polígonos semelhantes, e relacionam-se novamente volumes de sólidos.

A tabela seguinte permite identificar:

- o livro/site de onde foram retirados, ou adaptados, os problemas resolvidos, incluindo a página e o número do exercício;
- em que ano de escolaridade podem ser propostas cada um das resoluções;
- em que ano de escolaridade podem ser abordadas as variantes sem palavras;
- três níveis de desempenho dos exercícios; os que não se encontram assinalados com asteriscos correspondem a um nível de desempenho regular, identificando-se com um ou dois asteriscos os que correspondem a níveis de desempenho progressivamente mais avançados.

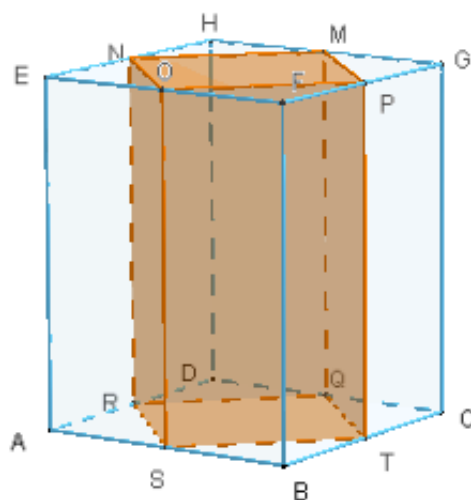
Problema	Baseado em	Resolução proposta	Variantes sem palavras
1	[21, pág. 33, ex. 17]	1 (a) → 8.º ano 1, 2, 3 (b) → 6.º ano	1, 3, 5 → 6.º ano 2, 4, 6, 7, 8 → 9.º ano
2	[21, pág. 44, ex. 1, 2]	1 (a), (c) → 8.º ano (b), (d) → 9.º ano 2 (a), (c) → 8.º ano (b) → 9.º ano (d) → 7.º ano	1, 2, 3, 7, 8, 9, 10 → 8.º ano 4, 5, 6 → 9.º ano
3	[21, pág. 48, ex. 4]	1 → 7.º ano	1, 2, 3, 4, 5 → 6.º ano 7, 8*, 9, 10, 11*, 12*, 13*, 14* → 9.º ano
4	[21, pág. 48, ex. 2]	1 → 7.º ano 2 → 6.º ano	9.º ano
5	[21, pág. 49, ex. 7]	7.º ano	9.º ano
6	[15]	9.º ano	9.º ano

3.1 Prismas dentro de um prisma

Problema 1

Na figura abaixo, $[ABCDEFGH]$ representa um prisma quadrangular regular e $[MNOPQRST]$ um prisma cujos vértices são os pontos médios dos segmentos a que pertencem.

O prisma $[ABCDEFGH]$ tem 80 cm^2 de área lateral e a sua base é um quadrado com 16 cm^2 de área.



- Desenhe uma planificação do prisma triangular $[MPGCQT]$ e indique a área total deste prisma.
- Calcule o volume dos prismas triangular $[MPGCQT]$ e quadrangular $[MNOPQRST]$ de mais do que um modo.

Na tabela seguinte, apresentam-se os principais pré-requisitos necessários para a resolução deste problema.

Proposta de resolução	Pré-requisitos
1 da alínea (a)	Raiz quadrada; Teorema de Pitágoras; área lateral de um prisma; planificação de um prisma.
1 e 2 da alínea (b)	Volume de um prisma; área do triângulo e do quadrado.
3 da alínea (b)	Volume de um prisma; decomposição de um sólido.

Proposta de Resolução 1

(a) Em primeiro lugar, vamos determinar a medida do lado da base quadrangular do prisma $[ABCDEFGH]$, atendendo a que a base tem 16 cm^2 de área,

$$A_{[ABCD]} = 16 \text{ cm}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 16 \text{ cm}^2$$
$$\overline{AB} \geq 0 \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}.$$

De seguida, vamos determinar os comprimentos dos lados da base triangular do prisma $[MPGCQT]$. Observa-se que o triângulo $[MPG]$ é retângulo no vértice G e os dois catetos têm comprimento igual a

$$\frac{\overline{AB}}{2} = 2 \text{ cm}.$$

Assim, a área da base do prisma triangular $[MPGCQT]$ é

$$A_{base} = \frac{2 \times 2}{2} = 2 \text{ cm}^2.$$

Pelo Teorema de Pitágoras, obtém-se o comprimento da hipotenusa $[MP]$:

$$\overline{MP}^2 = 2^2 + 2^2 \quad \overline{MP} \geq 0 \Leftrightarrow \overline{MP} = 2\sqrt{2} \text{ cm}.$$

Vamos ainda determinar a altura dos prismas, a partir da área lateral do prisma $[ABCDEFGH]$. Como este prisma é quadrangular, então a área de cada face lateral é um quarto da área lateral. Por exemplo,

$$A_{[BCFG]} = \frac{80}{4} = 20 \text{ cm}^2.$$

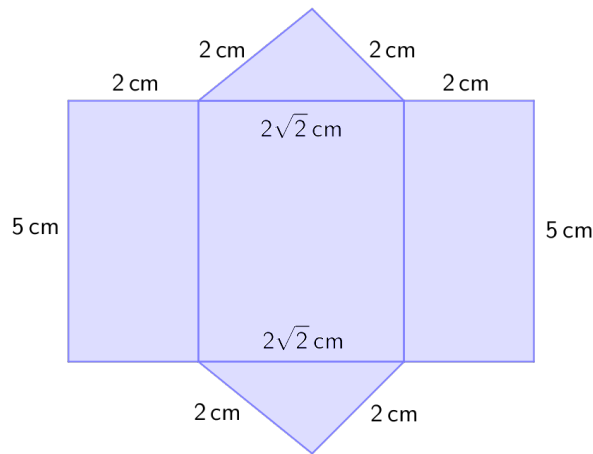
Como as faces laterais do prisma $[ABCDEFGH]$ são retângulos e já calculámos o comprimento de um dos seus lados, o que coincide com a medida do lado da base quadrangular, tem-se

$$\overline{BC} \times \overline{CG} = 20 \text{ cm}^2 \Leftrightarrow 4 \times \overline{CG} = 20 \text{ cm}^2.$$

Então o comprimento da aresta $[CG]$ que determina a altura de ambos os prismas é

$$h = \overline{CG} = 5 \text{ cm}.$$

Obtém-se, assim, a seguinte planificação do prisma triangular $[MPGCQT]$.



A área lateral deste prisma triangular é

$$A_{lateral} = (2 + 2\sqrt{2} + 2) \times 5 = 20 + 10\sqrt{2} \text{ cm}^2.$$

Então a área total do prisma triangular $[MPGCQT]$ é dada por

$$\begin{aligned} A_{total} &= 2 \times A_{base} + A_{lateral} \\ &= 24 + 10\sqrt{2} \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

(b) A altura do prisma $[MPGCQT]$, calculada na alínea anterior, é $h = 5$ cm. Esta é igualmente a altura do prisma quadrangular $[MNOPQRST]$.

Atendendo à área da base triangular do prisma $[MPGCQT]$, também antes calculada, tem-se que o seu volume é

$$\begin{aligned} V_{[MPGCQT]} &= A_{base} \times h \\ &= 2 \times 5 \\ &= 10 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Por outro lado, o volume do prisma $[MNOPQRST]$, cuja base é um quadrado de medida do lado $2\sqrt{2}$ cm, é

$$\begin{aligned} V_{[MNOPQRST]} &= A_{[QRST]} \times h \\ &= (2\sqrt{2})^2 \times 5 \\ &= 40 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Proposta de Resolução 2

(b) Em alternativa, pode calcular-se a área da base do prisma $[MPGCQT]$, observando que esta é um triângulo com um oitavo da área do quadrado que constitui a base do prisma $[ABCDEFGH]$, ou seja,

$$A_{base} = \frac{A_{[ABCD]}}{8} = \frac{16}{8} = 2 \text{ cm}^2.$$

Todos os prismas têm 5 cm de altura. Então o volume do prisma triangular $[MPGCQT]$ é

$$V_{[MPGCQT]} = A_{base} \times 5 = 10 \text{ cm}^3.$$

Quanto ao volume do prisma $[ABCDEFGH]$, cuja base tem 16 cm^2 de área, tem-se

$$V_{[ABCDEFGH]} = 16 \times 5 = 80 \text{ cm}^3.$$

Nota-se que o volume do prisma quadrangular $[MNOPQRST]$ satisfaz

$$\begin{aligned} V_{[MNOPQRST]} &= V_{[ABCDEFGH]} - 4 \times V_{[MPGCQT]} \\ &= 80 - 4 \times 10 \\ &= 40 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Proposta de Resolução 3

(b) Os três prismas, $[ABCDEFGH]$, $[CQTGMP]$ e $[MNOPQRST]$, possuem a mesma altura. As áreas das bases dos prismas triangular $[MPGCQT]$ e quadrangular $[MNOPQRST]$ são, respetivamente, a oitava parte e metade da área da base do prisma $[ABCDEFGH]$. Como o volume de um prisma é igual ao produto da área da base pela altura, conclui-se que

$$V_{[MPGCQT]} = \frac{V_{[ABCDEFGH]}}{8} \quad \text{e} \quad V_{[MNOPQRST]} = \frac{V_{[ABCDEFGH]}}{2}.$$

O prisma $[ABCDEFGH]$ tem 16 cm^2 de área da base e 5 cm de altura, logo o seu volume é igual a

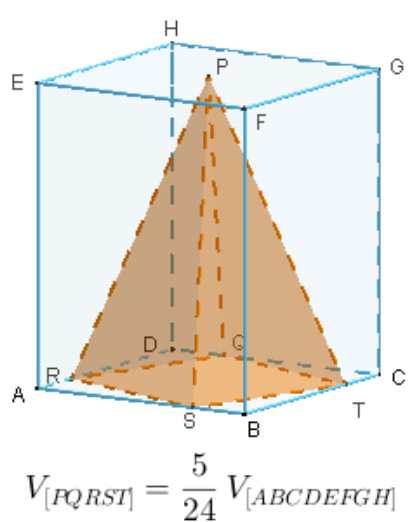
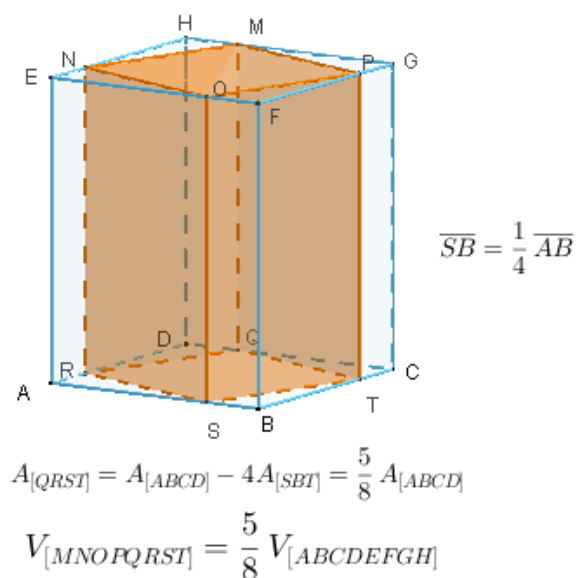
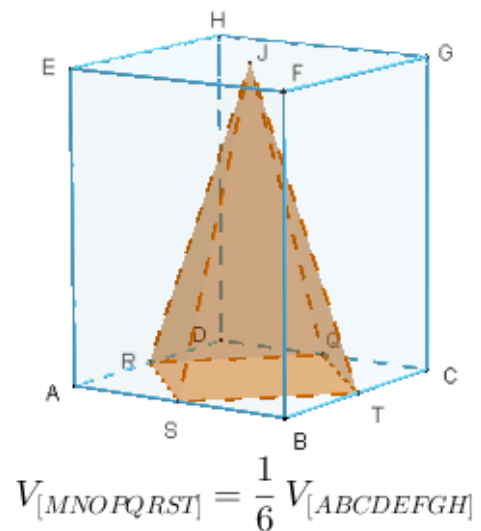
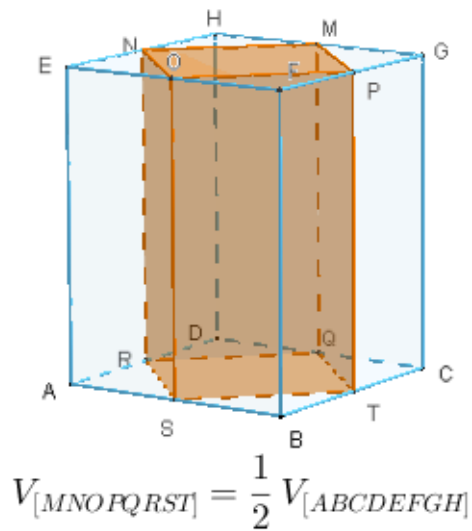
$$V_{[ABCDEFGH]} = 16 \times 5 = 80 \text{ cm}^3,$$

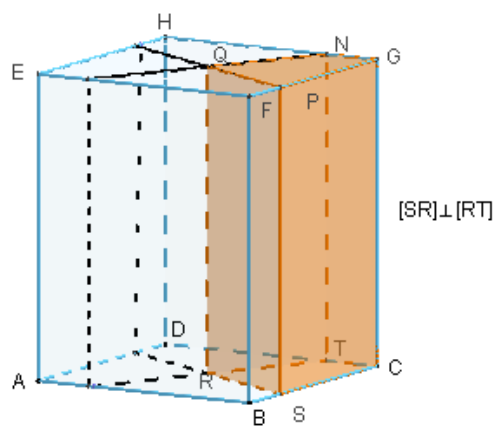
pelo que se obtêm

$$V_{[MPGCQT]} = \frac{80}{8} = 10 \text{ cm}^3 \quad \text{e} \quad V_{[MNOPQRST]} = \frac{80}{2} = 40 \text{ cm}^3.$$

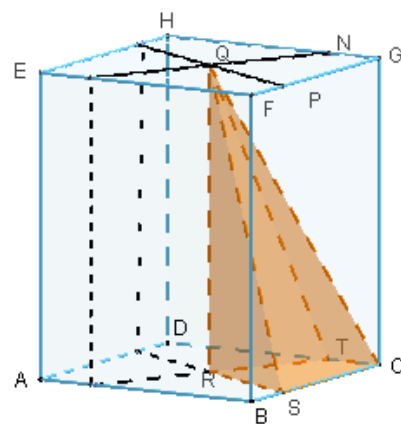
3.1.1 Variantes sem palavras - Volumes de prismas e pirâmides

Os dois próximos sólidos são construídos como no problema anterior, com os vértices da base nos pontos médios dos segmentos a que pertencem.

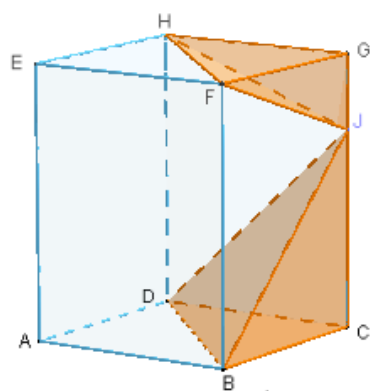




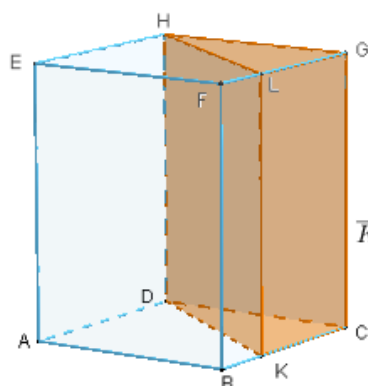
$$V_{[GNPQRSTC]} = \frac{1}{4} V_{[ABCDEFGH]}$$



$$V_{[QNRSTC]} = \frac{1}{12} V_{[ABCDEFGH]}$$



$$V_{[FHGJ]} + V_{[BCDJ]} = \frac{1}{6} V_{[ABCDEFGH]}$$



$$V_{[DKCHLG]} = \frac{x}{2} V_{[ABCDEFGH]}$$

$$[KL] // [BF]$$

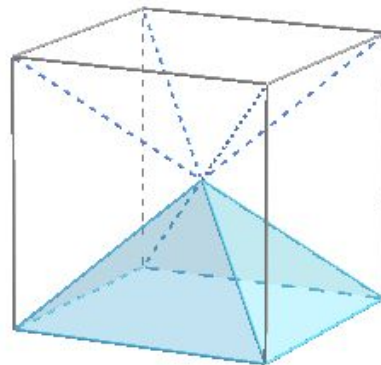
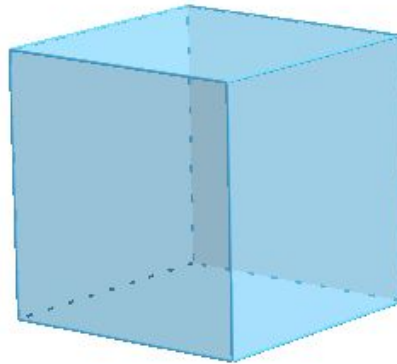
$$\overline{KC} = x \overline{BC}, x \in]0, 1]$$

3.2 Cubo e pirâmide

Problema 2

Na figura abaixo está representado um cubo com aresta de medida a .

É possível decompor o cubo em seis pirâmides cuja base é uma face do cubo e o vértice comum o centro desse cubo.



- (a) Calcule a medida do comprimento das arestas destas pirâmides em função da medida do comprimento a das arestas do cubo.
- (b) Calcule, em função de a , o volume V de cada uma destas pirâmides.
- (c) Determine, em função de a , a área total da pirâmide.
- (d) Qual é, em função de a , a área da base de uma pirâmide semelhante a cada uma destas, com uma altura igual à medida da aresta do cubo?

Na tabela seguinte, apresentam-se os principais pré-requisitos necessários para a resolução deste problema.

Proposta de resolução	Pré-requisitos
1 (a)	Teorema de Pitágoras.
1 (b)	Volume da pirâmide.
1 (c)	Teorema de Pitágoras; área total de uma pirâmide; área de um triângulo.
1 (d)	Razão de semelhança, área do quadrado.
2 (a)	Teorema de Pitágoras; diagonal espacial do cubo.
2 (b)	Volume do cubo; volume da pirâmide.
2 (c)	Área de um retângulo; área do triângulo; triângulos equivalentes.
2 (d)	Razão de semelhança; razão entre as áreas de dois quadrados.

Proposta de Resolução 1

(a) A medida das arestas da base da pirâmide é igual à medida a da aresta do cubo.

Vamos agora calcular a medida das arestas laterais da pirâmide.

Pelo Teorema de Pitágoras, podemos calcular a medida d da diagonal facial do cubo,

$$d^2 = a^2 + a^2 \stackrel{d \geq 0}{\Leftrightarrow} d = \sqrt{2}a.$$

A aresta lateral da pirâmide é a hipotenusa de um triângulo retângulo em que um dos catetos é metade da diagonal facial do cubo e o outro é metade da aresta do cubo. Podemos calcular a medida t da aresta lateral da pirâmide, aplicando novamente o Teorema de Pitágoras, tendo-se

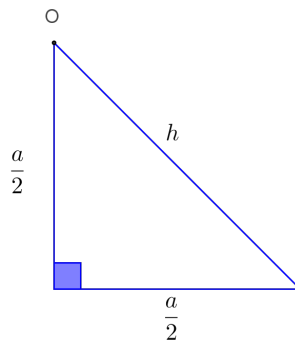
$$t^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{2a^2}{4}$$

$$\stackrel{t \geq 0}{\Leftrightarrow} t = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

(b) Uma vez que a altura das pirâmides é metade da aresta a do cubo e a base quadrangular tem área a^2 , o volume de cada pirâmide é

$$V = \frac{1}{3} \left(A_{base} \times \frac{a}{2} \right) = \frac{1}{3} \left(a^2 \times \frac{a}{2} \right) = \frac{a^3}{6}.$$

(c) Seja h a altura de uma face lateral da pirâmide.



Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se

$$h^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 = 2 \times \frac{a^2}{4}$$

$$\stackrel{h \geq 0}{\Leftrightarrow} h = \frac{\sqrt{2}}{2} a.$$

A área total da pirâmide é, assim, dada por

$$\begin{aligned} A_{total} &= A_{base} + A_{lateral} \\ &= a^2 + 4 \times \frac{a \times \frac{\sqrt{2}}{2} a}{2} \\ &= (1 + \sqrt{2}) a^2. \end{aligned}$$

- (d) Se a altura da pirâmide duplica e a pirâmide obtida é semelhante à anterior, então todas as medidas de comprimento aumentam na mesma proporção. Em particular, a aresta da base da nova pirâmide é $2a$. Portanto, a área da base desta pirâmide é igual a $4a^2$.

Proposta de Resolução 2

- (a) Se a medida da aresta do cubo é a , então a medida das arestas da base das pirâmides é a , a altura das pirâmides é metade da aresta do cubo, $a/2$, e a medida da diagonal espacial do cubo é

$$\sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3} a.$$

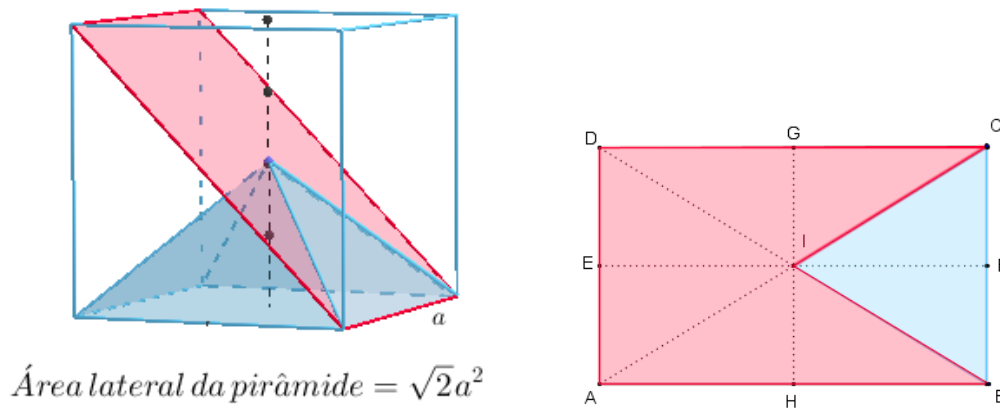
Consequentemente, a medida da aresta lateral das pirâmides é metade da diagonal espacial do cubo, $\sqrt{3} a/2$.

- (b) O cubo decompõe-se em seis pirâmides, logo o volume de cada pirâmide é a sexta

parte do volume do cubo, obtendo-se

$$V = \frac{V_{cubo}}{6} = \frac{a^3}{6}.$$

- (c) Vamos confirmar que a área lateral de cada pirâmide é igual à área da secção do cubo que contém uma das faces da pirâmide. Na figura, podemos verificar que esta secção foi dividida em oito triângulos com a mesma área e geometricamente iguais.



A face lateral da pirâmide é formada por dois destes triângulos. Como a pirâmide tem quatro faces laterais, concluímos que a área lateral é igual à área da secção do cubo que contém uma face lateral. Tal secção é um retângulo cujos lados têm as medidas da aresta do cubo, a , e da diagonal facial do cubo, \sqrt{a} . Logo a área lateral da pirâmide é

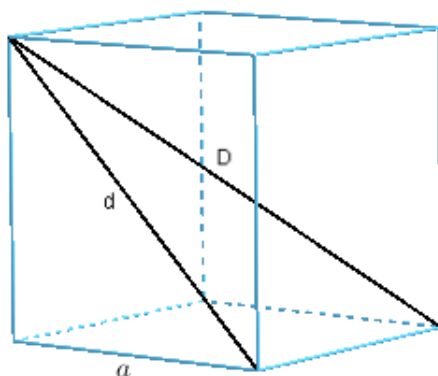
$$A_{lateral} = \sqrt{2}a^2$$

e a área total da pirâmide é

$$\begin{aligned} A_{total} &= A_{base} + A_{lateral} \\ &= a^2 + \sqrt{2}a^2 \\ &= (1 + \sqrt{2})a^2 \end{aligned}$$

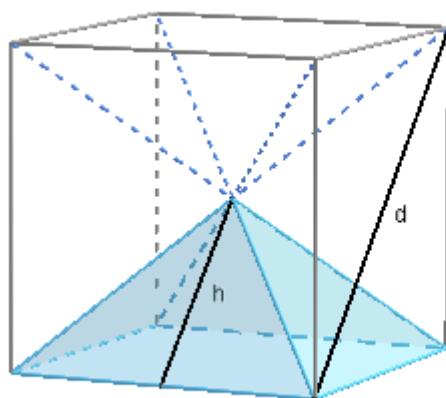
- (d) Como a altura da pirâmide duplica, a razão de semelhança é $r = 2$. Logo, a razão entre as áreas das bases das pirâmides coincide com o quadrado da razão de semelhança, $r^2 = 4$. A base da pirâmide original é uma face do cubo de área a^2 . Então a área da base da pirâmide ampliada é igual a $4a^2$.

3.2.1 Variantes sem palavras - Medidas, áreas e volumes de pirâmides no cubo

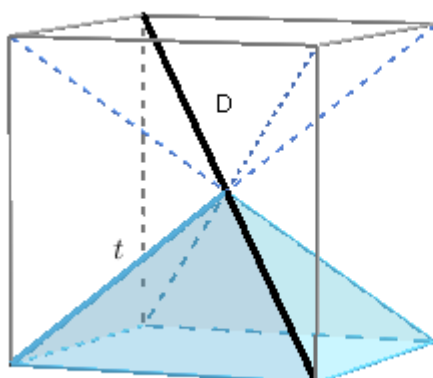


$$d = \sqrt{2}a$$

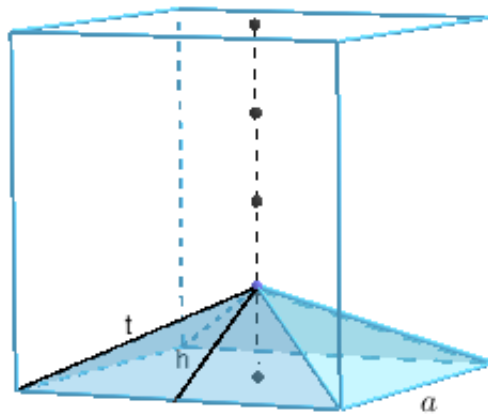
$$D = \sqrt{3}a$$



$$h = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a$$



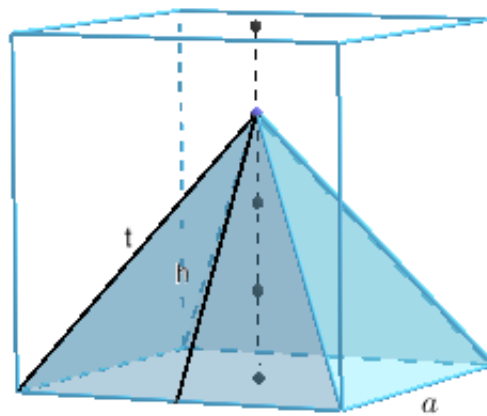
$$t = \frac{D}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$



$$h = \frac{\sqrt{5}}{4} a$$

$$t = \frac{3}{4} a$$

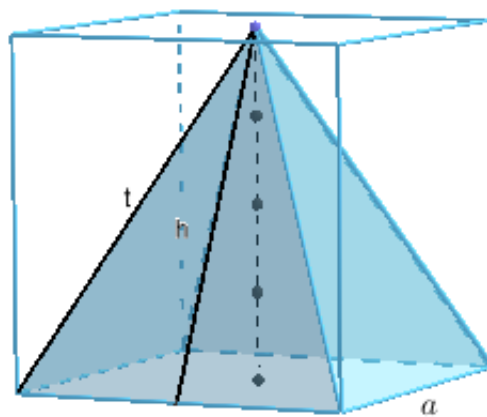
$$V_{\text{Pirâmide}} = \frac{a^3}{12}$$



$$h = \frac{\sqrt{13}}{4} a$$

$$t = \frac{\sqrt{17}}{4} a$$

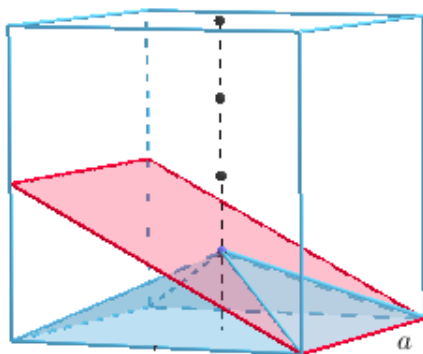
$$V_{\text{Pirâmide}} = \frac{a^3}{4}$$



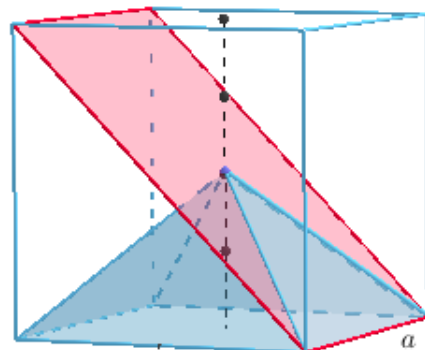
$$h = \frac{\sqrt{5}}{2} a$$

$$t = \frac{\sqrt{6}}{2} a$$

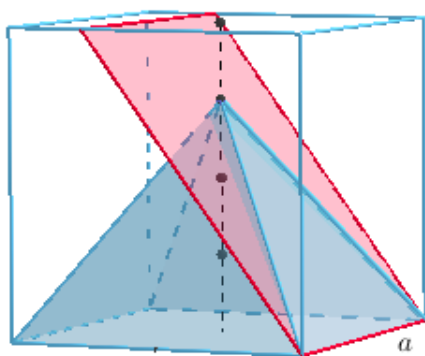
$$V_{\text{Pirâmide}} = \frac{a^3}{3}$$



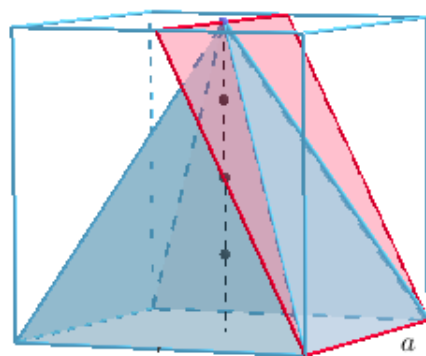
$$\text{Área lateral da pirâmide} = \frac{\sqrt{5}}{2} a^2$$



$$\text{Área lateral da pirâmide} = \sqrt{2} a^2$$



$$\text{Área lateral da pirâmide} = \frac{\sqrt{13}}{2} a^2$$

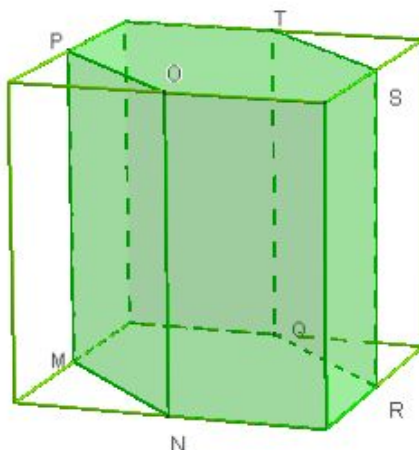


$$\text{Área lateral da pirâmide} = \sqrt{5} a^2$$

3.3 Prisma hexagonal dentro do cubo

Problema 3

Um cubo cuja aresta mede a centímetros foi truncado da forma que a figura sugere. Os vértices M, N, O, P, Q, R, S e T do prisma hexagonal obtido são os pontos médios das arestas do cubo a que pertencem.



O volume do prisma hexagonal, em função da medida da aresta do cubo, em centímetros cúbicos, é:

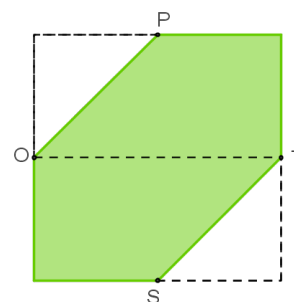
- A. $\frac{9\sqrt{3}a^3}{4}$; B. $\frac{7a^3}{8}$; C. $\frac{3a^3}{4}$; D. $\frac{a^3}{2}$.

Na tabela seguinte, apresentam-se os principais pré-requisitos necessários para a resolução deste problema.

Proposta de resolução	Pré-requisitos
1	Volume do prisma; área do trapézio.
2	Volume do prisma; figuras equivalentes.

Proposta de Resolução 1

Vamos representar uma das faces do cubo que contém uma das bases do prisma hexagonal. Decompomos este hexágono em dois trapézios geometricamente iguais, com altura $a/2$, bases maior e menor de medidas a e metade de a , respetivamente.



Cada um destes trapézios tem área, em centímetros quadrados, igual a

$$\begin{aligned} A_{\text{trapézio}} &= \frac{\left(\frac{a}{2} + a\right) \times \frac{a}{2}}{2} \\ &= \frac{a^2}{2} + a^2 \\ &= \frac{3a^2}{2}. \end{aligned}$$

Então o prisma hexagonal tem a área da base, em centímetros quadrados, igual a

$$A_{\text{base}} = 2 \times A_{\text{trapézio}} = \frac{3a^2}{4}$$

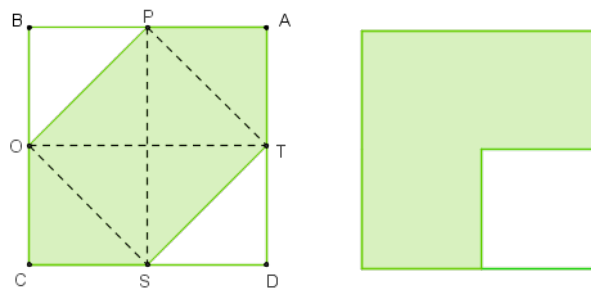
e volume, em centímetros cúbicos, dado por

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \times a = \frac{3a^3}{4}.$$

Assim, a resposta correta é a opção C.

Proposta de Resolução 2

Podemos dividir a representação da face do cubo que contém uma das bases do prisma hexagonal em oito partes geometricamente iguais, como indica na figura.



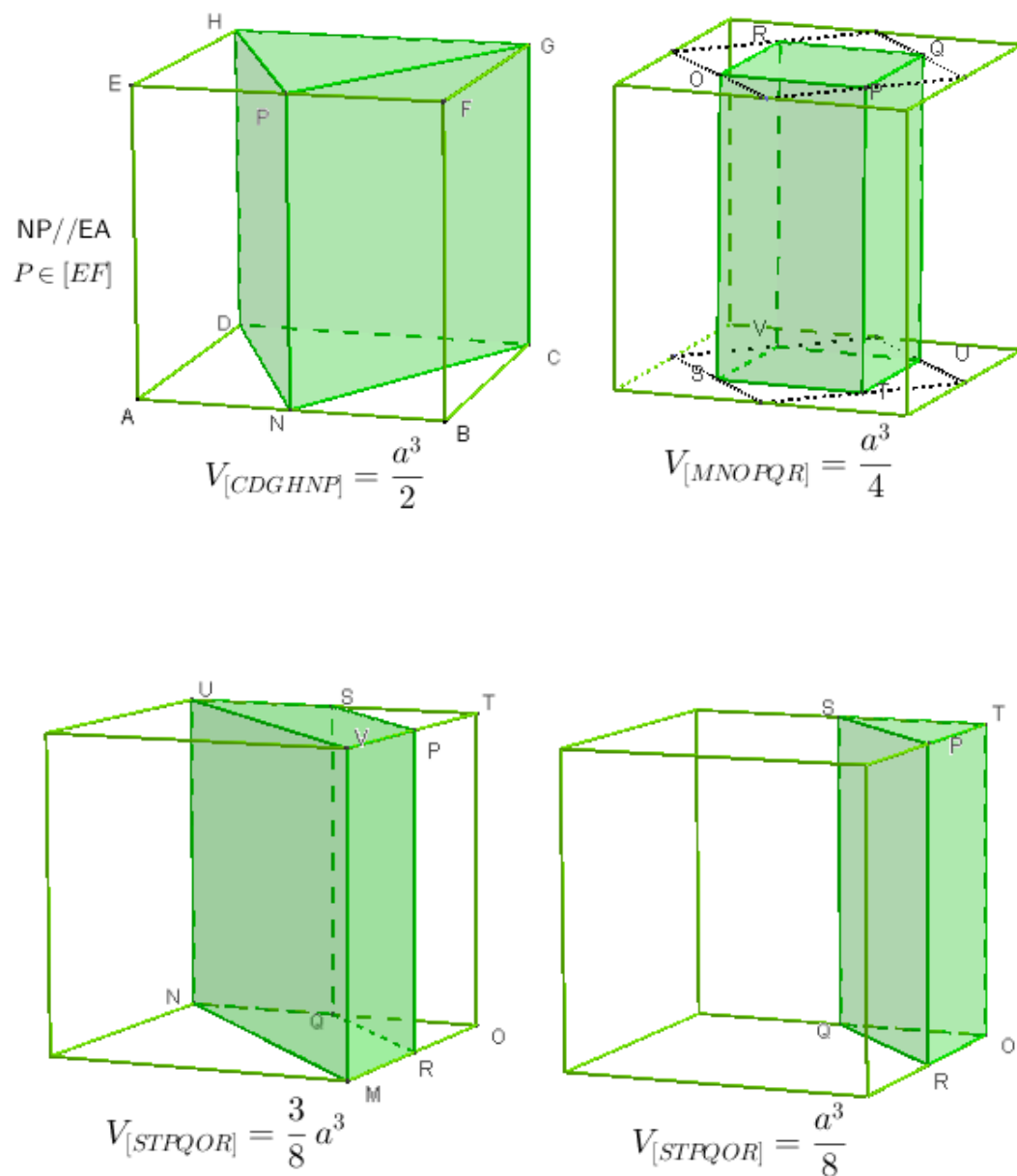
Observa-se que a área da base do prisma hexagonal contém seis oitavos, isto é, três quartos da área a^2 da face do cubo, tendo-se o volume do prisma hexagonal, em centímetros cúbicos:

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \times a = \frac{3a^3}{4}$$

e a opção C como a correta.

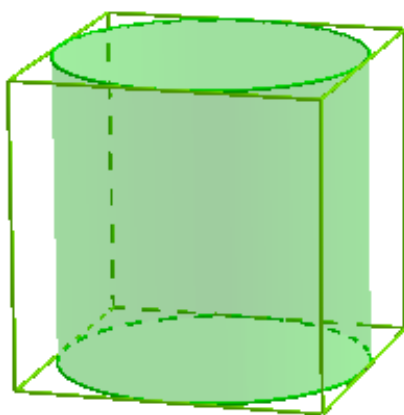
3.3.1 Variantes sem palavras - Volume de sólidos no cubo de aresta a

Nesta subsecção, visualizam-se sólidos construídos num cubo com a unidades de aresta.

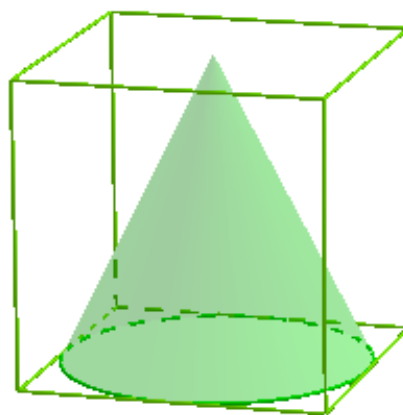


Nos dois prismas acima, S , P , R e Q são os pontos médios das arestas a que pertencem.

Nos sólidos de revolução abaixo, a altura e diâmetro da base têm a medida da aresta do cubo.

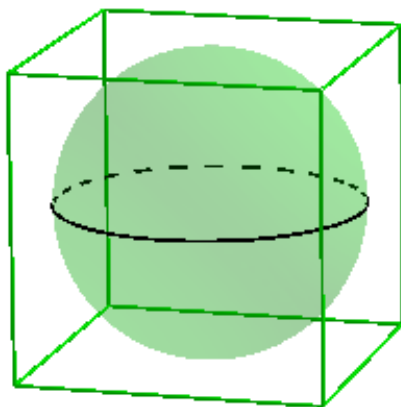


$$V_{Cilindro} = \frac{\pi a^3}{4}$$

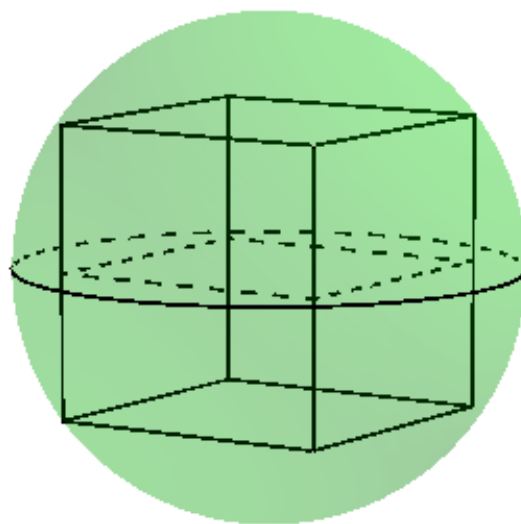


$$V_{Cone} = \frac{\pi a^3}{12}$$

Obtém-se ainda os volumes das esferas inscrita e circunscrita ao cubo.

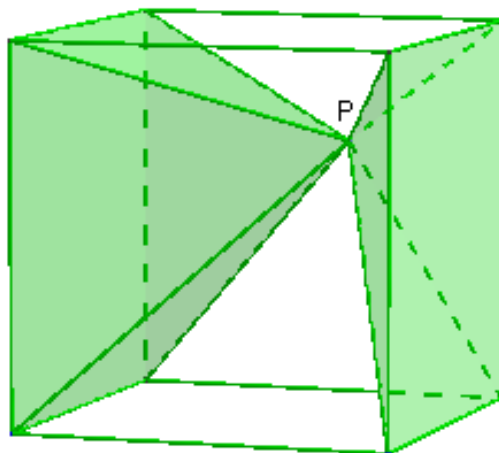


$$V_{Esfera} = \frac{\pi a^3}{6}$$

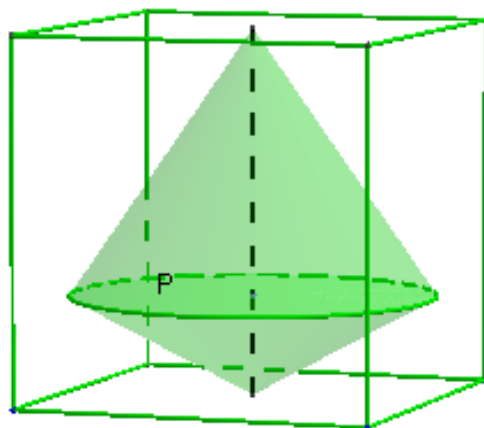


$$V_{Esfera} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi a^3$$

Constroem-se os próximos sólidos a partir de um ponto qualquer P no interior do cubo.



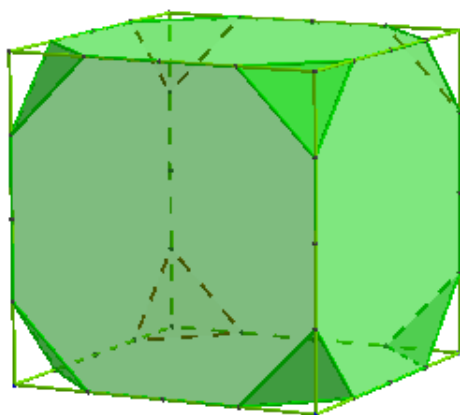
$$V_{\text{Sólido}} = \frac{a^3}{3}$$



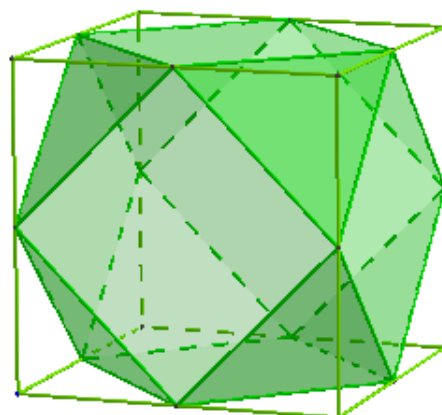
P pertence ao interior do cubo e à base dos dois cones

$$V_{\text{Sólido}} = \frac{\pi a^3}{12}$$

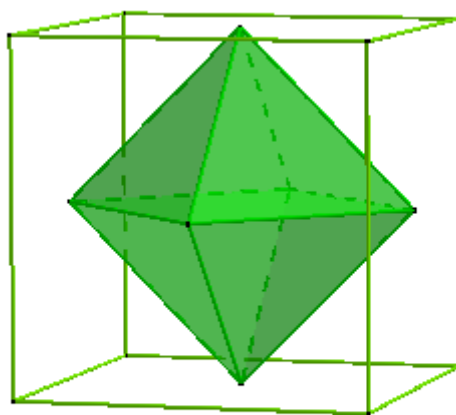
Terminamos com alguns sólidos Arquimedianos, o cubo truncado, o cubo octaedro e o octaedro truncado, e um dos cinco sólidos Platônicos, dual¹ do cubo, o octaedro.



$$V_{\text{Cubo truncado}} = \frac{47}{48} a^3$$

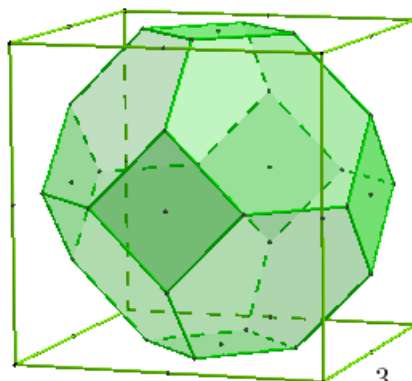
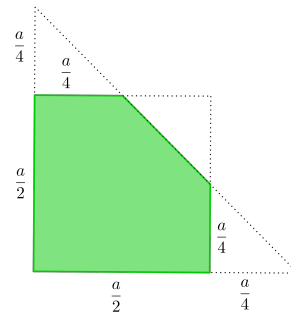
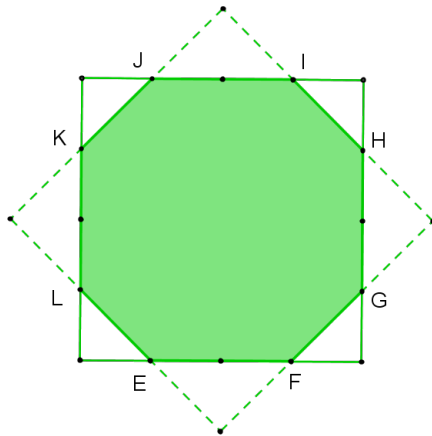
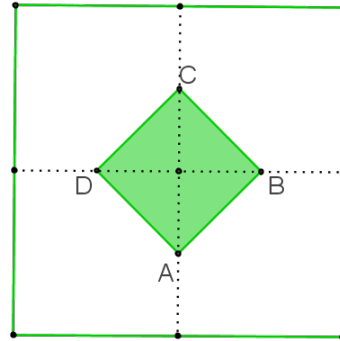
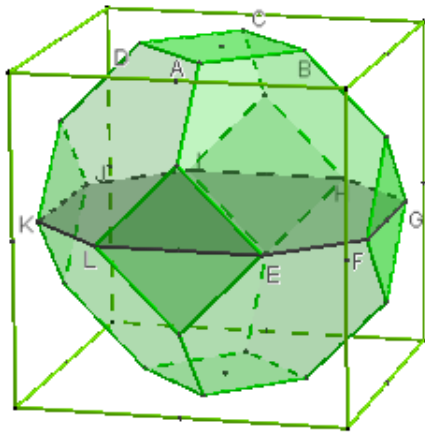


$$V_{\text{Cubo octaedro}} = \frac{5}{6} a^3$$



$$V_{\text{Octaedro}} = \frac{a^3}{6}$$

¹Os sólidos Platônicos são o tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. O dual de um sólido é um outro sólido que se obtém unindo os pontos centrais das faces adjacentes do sólido original.



$$V_{\text{Octaedro truncado}} = \frac{a^3}{2}$$

3.4 Relação entre volumes de cubos

Problema 4

O volume de um cubo é x metros cúbicos. Então o volume, em metros cúbicos, de um cubo cuja aresta mede o dobro da aresta do primeiro cubo é

- A. $2x$; B. $4x$; C. $8x$; D. $2x^3$.

Na tabela seguinte, apresentam-se os principais pré-requisitos necessários para a resolução deste problema.

Proposta de resolução	Pré-requisitos
1	Raiz cúbica; volume do cubo.
2	Razão entre volumes de sólidos semelhantes

Proposta de Resolução 1

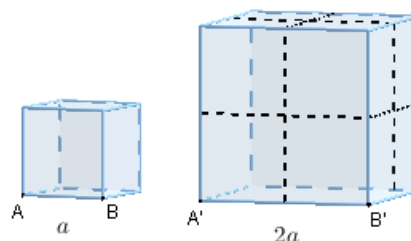
Sabendo que o volume de um cubo com aresta de comprimento a é igual a a^3 , conclui-se que a medida da aresta a do cubo com x metros cúbicos de volume é $a = \sqrt[3]{x}$ metros. Daqui resulta que o volume do cubo cuja aresta mede o dobro de a é

$$(2a)^3 = (2\sqrt[3]{x})^3 = 2^3 x = 8x$$

metros cúbicos. Portanto, a opção C é a resposta correta.

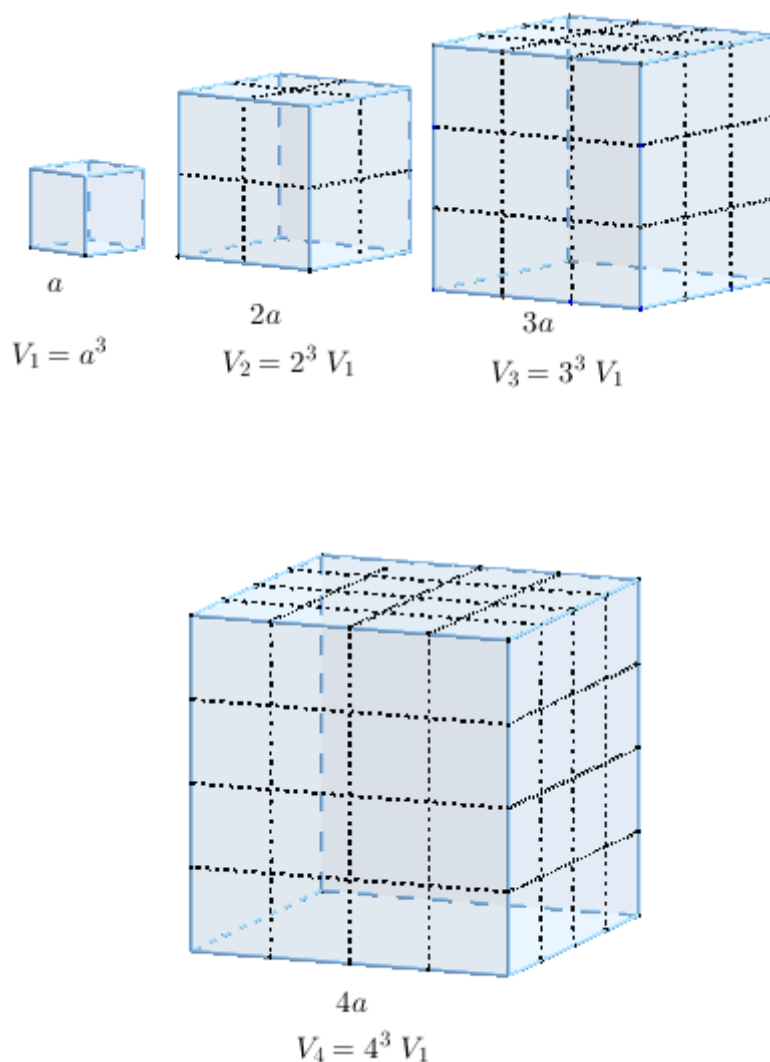
Proposta de Resolução 2

Consideremos dois cubos em que a aresta do segundo mede o dobro da aresta do primeiro. Verificamos que a área da base no segundo cubo é quatro vezes maior do que a do primeiro. A altura do segundo cubo é o dobro da altura do primeiro cubo. Assim, o volume do segundo cubo é oito vezes superior ao volume do cubo inicial. Conclui-se que a opção correta é a C.



3.4.1 Provas sem palavras - Razão entre volumes de cubos

Seja V_n o termo geral de uma sucessão de volumes de cubos cujas arestas medem na unidades de comprimento. Os quatro primeiros termos desta sequência encontram-se a seguir representados.



Continuando este raciocínio, $V_n = n^3 V_1$, qualquer que seja o número natural n , pelo que

$$\frac{V_n}{V_m} = \left(\frac{n}{m}\right)^3,$$

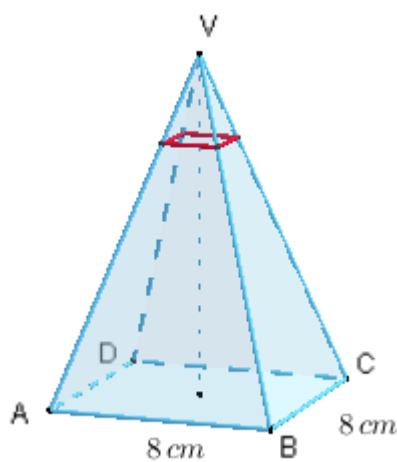
sendo m e n números naturais.

Conclui-se que se r é a razão de semelhança entre os comprimentos das arestas de dois cubos, então r^3 é a razão de semelhança entre os seus volumes.

3.5 À luz da vela

Problema 5

Uma vela de cera tem a forma de uma pirâmide quadrangular regular. A base é um quadrado com oito centímetros de lado. A três quartos da sua altura foi colocada uma fita colorida paralelamente à base, como se mostra na figura, a toda a volta da vela. Qual é o comprimento da fita?



Na tabela seguinte, apresentam-se os principais pré-requisitos necessários para a resolução deste problema.

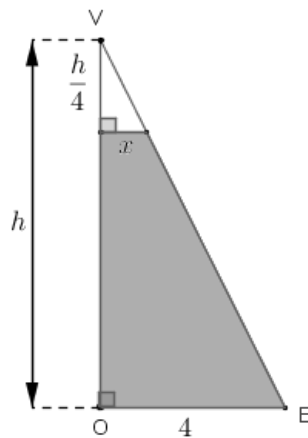
Proposta de resolução	Pré-requisitos
1	Semelhança de triângulos.
2	Razão de semelhança; razão entre as áreas de polígonos semelhantes.

Proposta de Resolução 1

Para resolver o problema vamos fazer um esquema, denotando por

- E o ponto médio do segmento $[BC]$;
- h a altura da pirâmide;
- O o centro do quadrado da base;

- x metade do lado do quadrado formado pela fita.



É evidente que a fita colorida tem $8x$ centímetros de comprimento.

Atendendo à semelhança de triângulos, temos

$$\frac{\frac{h}{4}}{h} = \frac{x}{4} \Leftrightarrow x = 1.$$

Então o comprimento da fita colorida é exatamente oito centímetros.

Proposta de Resolução 2

A fita colorida colocada na vela paralelamente à base forma um quadrado que, naturalmente, é semelhante ao quadrado da base da pirâmide.

Seja r a razão de semelhança entre eles. Então o comprimento da fita será igual a r vezes o perímetro da base da pirâmide.

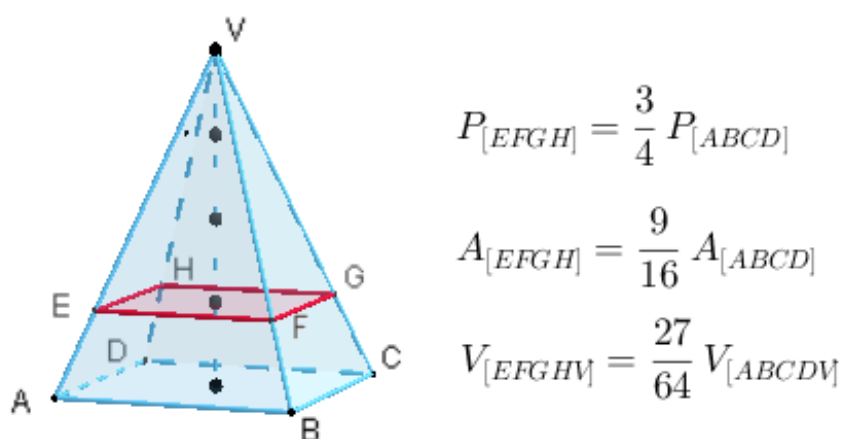
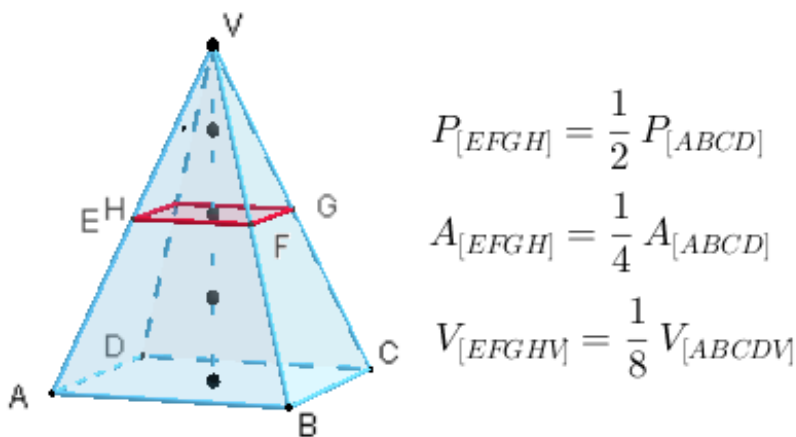
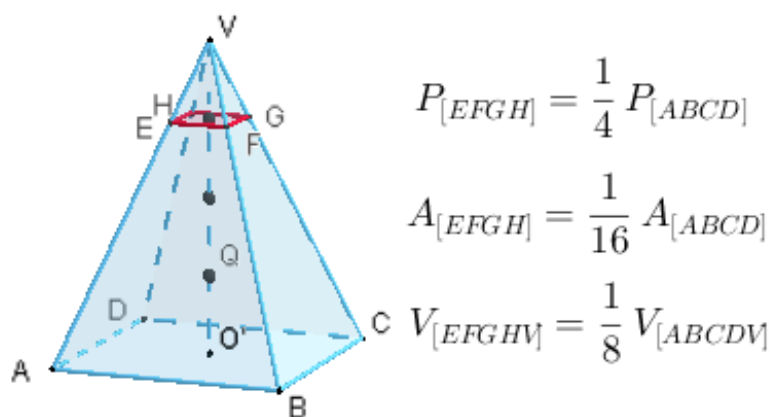
Se a distância do vértice à base da pirâmide for uma unidade, como a fita foi colocada a três quartos de altura da base, então a distância do vértice ao plano da fita paralelo à base é

$$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Atendendo à razão de semelhança, $r = 1/4$, a fita colorida colocada em torno da vela tem de comprimento um quarto do perímetro da base da pirâmide. Mas o perímetro do quadrado da base é o quádruplo da medida do seu lado. Assim, os comprimentos da fita colorida e do lado da base da pirâmide coincidem.

Conclui-se que a fita tem oito centímetros de comprimento.

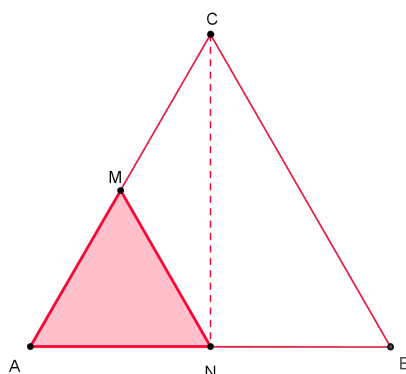
3.5.1 Variantes sem palavras - Perímetros, áreas e volumes na pirâmide



3.6 Sólido gerado por rotação de um triângulo

Problema 6

O triângulo $[ABC]$, representado na figura, é um triângulo equilátero. Os pontos M e N são os pontos médios dos lados a que pertencem. Numa rotação de 360° em torno da reta CN , o triângulo $[ACN]$ gera um cone de volume V . Determine, em função de V , o volume do sólido gerado na mesma rotação, pelo triângulo $[AMN]$.

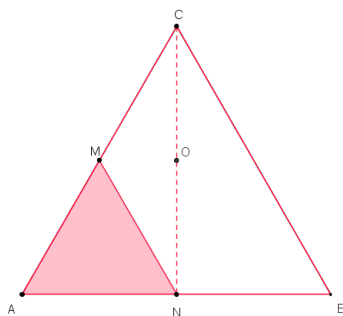


Na tabela seguinte, apresentam-se os principais pré-requisitos necessários para a resolução deste problema.

Proposta de resolução	Pré-requisitos
1	Volume de um cone; igualdade de triângulos.
2	Volume de um cone; razão de semelhança; razão entre os volumes de sólidos semelhantes.

Proposta de Resolução 1

Seja O o ponto médio do segmento $[CN]$.



Além do sólido gerado pelo triângulo $[AMN]$, o cone gerado pela rotação do triângulo $[ACN]$ em torno do eixo CN contém também o cone gerado pelo triângulo $[CMO]$ e outro de volume igual a este, gerado pelo triângulo $[MNO]$, designados por cones pequenos para abreviar.

As áreas das bases dos cones gerados pelos triângulos $[ACN]$ e $[CMO]$ são

$$A_{base} = \pi \times \overline{AN}^2 \quad \text{e} \quad A_{base\ pequeno} = \pi \times \overline{MO}^2,$$

respetivamente. O raio da base e a altura do cones pequenos são dados por

$$\overline{MO} = \frac{1}{2} \overline{AN} \quad \text{e} \quad \overline{CO} = \frac{1}{2} \overline{CN},$$

respetivamente. Então o volume de cada cone pequeno,

$$\begin{aligned} V_{cone\ pequeno} &= \frac{1}{3} \times A_{base\ pequeno} \times \overline{CO} \\ &= \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{1}{2} \overline{AN}\right)^2 \times \frac{1}{2} \overline{CN} \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{3} \times A_{base} \times \overline{CN}\right), \end{aligned}$$

é um oitavo do volume V do cone gerado pelo triângulo $[ACN]$.

O volume do sólido gerado pelo triângulo $[AMN]$ é

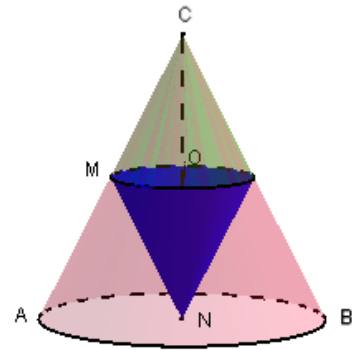
$$V_{sólido} = V - 2 \times V_{cone\ pequeno} = V - 2 \frac{V}{8} = \frac{3}{4} V.$$

Proposta de Resolução 2

Se O é o ponto médio do segmento $[CN]$, o triângulo $[CMO]$ é semelhante ao triângulo $[CAN]$, pelo critério AA (ângulo-ângulo), uma vez que o ângulo em C é comum aos dois triângulos e ambos possuem um ângulo reto, os ângulo em O e em N . Ora

$$\overline{MC} = \frac{1}{2} \overline{AC}.$$

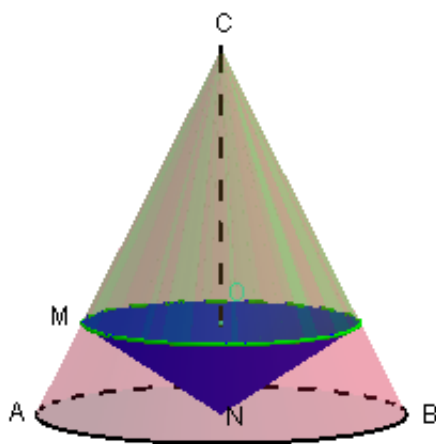
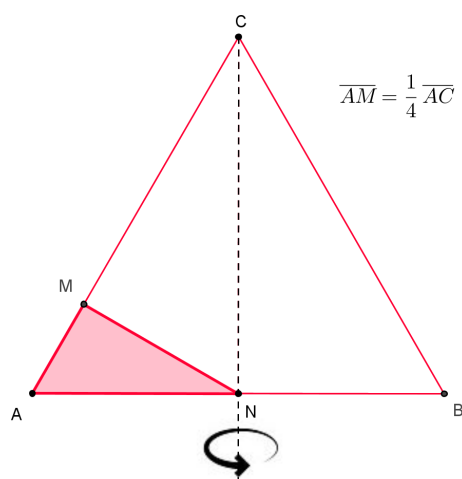
A razão de semelhança é $r = 1/2$, logo a razão entre os volumes é $r^3 = 1/8$ e o cone gerado por $[CMO]$ tem um oitavo do volume do cone gerado por $[CAN]$, o mesmo se verificando



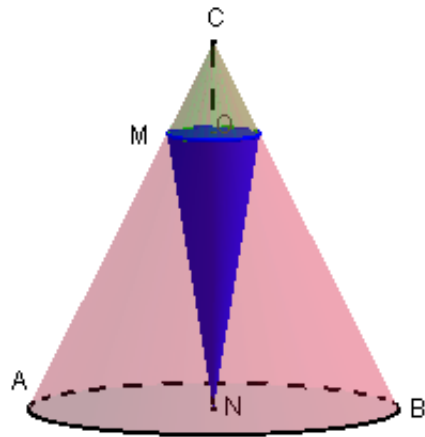
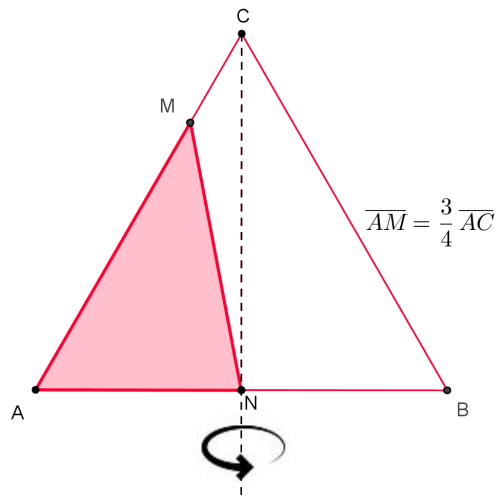
com o volume do cone gerado por $[MNO]$. Portanto,

$$V_{\text{sólido}} = V - 2 \times \frac{V}{8} = \frac{3}{4} V.$$

3.6.1 Variantes sem palavras - Rotação de um triângulo a duas alturas



$$V_{\text{sólido gerado por } [AMN]} = \frac{7}{16} V_{\text{cone gerado por } [ABC]}$$



$$V_{\text{sólido gerado por } [AMN]} = \frac{15}{16} V_{\text{cone gerado por } [ABC]}$$

Capítulo 4

Paradoxos Geométricos e Imagens Impossíveis

Há problemas, situações e imagens que parecem atentar contra a nossa capacidade intelectual, por apresentarem contradições que aparentemente desafiam a lógica e o senso comum, e são difíceis de explicar.

Na sua raiz etimológica, a palavra paradoxo é formada pelo prefixo “para” que tem o significado de “oposto de” ou “contrário a” e pelo sufixo “doxo” que significa opinião. Os paradoxos normalmente servem-se de uma falha no raciocínio, uma indução errônea ou simplesmente de uma aparente possibilidade física ou matemática para criar uma situação racionalmente contraditória.

Alguns paradoxos geométricos utilizam ilusões de ótica, nas quais apenas os olhos são enganados, para criar resultados impossíveis. Mas uma análise criteriosa, baseada em conhecimentos científicos, pode explicar e dar sentido a estes fenômenos.

Na verdade, a identificação de paradoxos tem auxiliado no progresso da Matemática e da Filosofia.

Neste capítulo, apresentam-se problemas associados a paradoxos geométricos conhecidos como o paradoxo do quadrado perdido, ou paradoxo de Curry, e a objetos ou imagens impossíveis como o Triângulo de Penrose, ou Tribarra, e a cascata impossível de Escher.

Quando usados em sala de aula, podem servir para captar a atenção, motivar e prevenir o estudante no sentido de não depositar excessiva confiança na forma aparente duma imagem. Além disso, permitem alertar para a importância e necessidade de provar uma conjectura formulada a partir de uma figura. Estes enigmas visuais também podem ser utilizados como ferramenta para consolidar conhecimentos e eliminar dúvidas inconscientes.

Deste modo, os paradoxos cumprem uma função essencial para a mente: propõem exercícios do pensamento e raciocínio que permitem lapidar o conhecimento científico.

A tabela seguinte permite identificar:

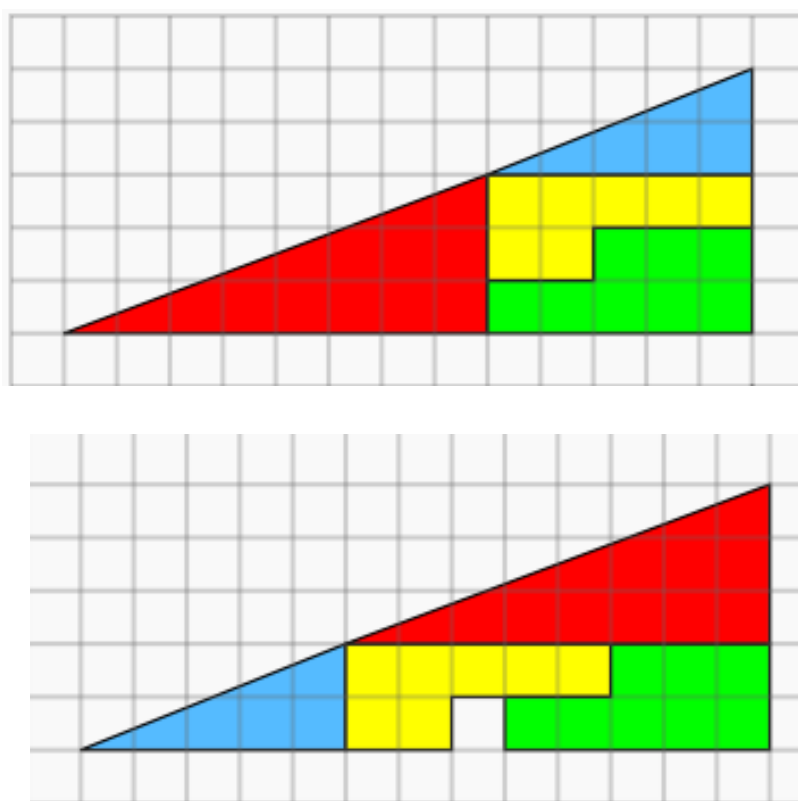
- o *site* de onde foram retiradas as imagens associadas aos problemas apresentados;
- em que ano de escolaridade podem ser propostas as resoluções indicadas;
- em que ano de escolaridade podem ser abordados os problemas adicionais sugeridos;
- dois níveis de desempenho, correspondentes aos dois mais avançados, identificados com um ou dois asteriscos.

Problema	Baseado em	Resolução proposta	Problemas adicionais
1	[24]	$1^* \rightarrow 6.^{\circ}$ ano $2^* \rightarrow 8.^{\circ}$ ano $3^* \rightarrow 9.^{\circ}$ ano $4^* \rightarrow 9.^{\circ}$ ano $5^* \rightarrow 7.^{\circ}$ ano $6^* \rightarrow 7.^{\circ}$ ano $7^* \rightarrow 4.^{\circ}$ ano	$4.^{\circ}$ ano*
2	[14], [11]	$6.^{\circ}$ ano*	$6.^{\circ}$ ano**
3	[14]	$6.^{\circ}$ ano**	$6.^{\circ}$ ano**

4.1 Paradoxo do quadrado perdido

Nas figuras abaixo, apresentam-se duas construções geométricas, formadas a partir de duas disposições diferentes de quatro peças coloridas – vermelha, azul, amarela e verde – que parecem constituir um triângulo retângulo de lados iguais.

Porém, quando se constrói o segundo objeto a partir do primeiro, ao dispor as quatro peças coloridas de modo distinto surge, inesperadamente, um quadrado branco adicional que a primeira figura parece não incluir. Assim, se justifica a designação de paradoxo do quadrado perdido atribuída ao problema.



De acordo com Martin Gardner, reconhecido divulgador de Matemática Recreativa, este truque foi elaborado pelo mágico amador Paul Curry, de Nova Iorque, em 1953 e, por isso, também é chamado paradoxo de Curry. Contudo, o princípio subjacente a este tipo de problemas é conhecido desde, pelo menos, 1860.

Problema

Como se explica que as duas figuras anteriores, contendo as mesmas peças coloridas, pareçam formar um mesmo triângulo e uma contenha um pequeno quadrado a menos do que a outra?

A tabela seguinte inclui os pré-requisitos fundamentais necessários para as várias resoluções aqui sugeridas para este problema, sete propostas de resolução no total, adequadas a diferentes estádios de ensino, aplicando conteúdos bem diversificados.

Proposta de resolução	Pré-requisitos
1	Área do triângulo; área de um polígono usando quadrículas.
2	Teorema de Pitágoras.
3	Função inversa da tangente; triângulos semelhantes.
4	Função inversa da tangente; ângulo raso; quadrilátero côncavo; quadrilátero convexo.
5	Equação reduzida da reta; quadrilátero côncavo; quadrilátero convexo; referencial cartesiano.
6	Teorema de Tales no triângulo; quadrilátero côncavo; quadrilátero convexo.
7	Triângulos semelhantes; polígonos geometricamente iguais.

Proposta de Resolução 1

Vamos calcular, separadamente, a área de cada um dos polígonos coloridos das imagens, considerando que cada quadrícula possui uma unidade quadrada de área. Os polígonos laranja e verde têm 7 e 8 unidades quadradas de área, respetivamente. Atendendo às medidas da base e da altura, os triângulo azul e vermelho têm

$$\frac{5 \times 2}{2} = 5 \quad \text{e} \quad \frac{8 \times 3}{2} = 12$$

unidades quadradas de área, respetivamente. Adicionalmente, o triângulo retângulo, cujos catetos têm 13 e 5 unidades de comprimento, possui

$$\frac{13 \times 5}{2} = 32,5$$

unidades quadradas de área. A soma das áreas dos polígonos que constituem a região colorida da figura inicial é igual a

$$7 + 8 + 5 + 12 = 32$$

e a região da segunda figura, contendo os quatro polígonos coloridos da primeira e o quadrado branco adicional, possui 33 unidades quadradas de área. Embora as figuras o possam sugerir, nenhuma destas regiões coincide com a que é delimitada pelo triângulo retângulo com catetos de 13 e 5 unidades de comprimento.

Proposta de Resolução 2

Vamos calcular, pelo Teorema de Pitágoras, as medidas da hipotenusa:

- h_1 do triângulo colorido a azul na figura;
- h_2 do triângulo colorido a vermelho na figura;
- h do triângulo retângulo com catetos de medidas 13 e 5.

Considerando como unidade de comprimento a medida do lado de cada quadrícula da figura, os catetos do triângulo azul medem 5 e 2 unidades de comprimento, logo

$$h_1^2 = 5^2 + 2^2 \quad \overset{h_1 \geq 0}{\Leftrightarrow} \quad h_1 = \sqrt{29};$$

os catetos do triângulo vermelho medem 8 e 3 unidades de comprimento, pelo que

$$h_2^2 = 8^2 + 3^2 \quad \overset{h_2 \geq 0}{\Leftrightarrow} \quad h_2 = \sqrt{73}.$$

Por outro lado,

$$h^2 = 13^2 + 5^2 \quad \overset{h \geq 0}{\Leftrightarrow} \quad h = \sqrt{194}.$$

Se as quatro peças, azul, vermelha, laranja e verde, da primeira figura, ou as quatro peças coloridas e o quadrado branco da segunda figura, formassem um triângulo retângulo, com catetos de comprimento 13 e 5 unidades, então a soma das medidas das hipotenusas dos triângulos azul e vermelho seria igual a h . Contudo,

$$h_1 + h_2 = \sqrt{29} + \sqrt{73} = 13,92916855...$$

é maior do que

$$h = \sqrt{194} = 13,92838828...$$

Não obstante a aparência, as figuras não formam um triângulo retângulo.

Proposta de Resolução 3

Vamos comparar os ângulos internos de menor amplitude dos triângulos da figura coloridos a vermelho e azul.

No triângulo azul, o menor ângulo interno, oposto ao cateto de medida 2, tem amplitude

$$\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = \tan^{-1}(0,4) \simeq 21,80^\circ.$$

No triângulo colorido de vermelho, o menor ângulo interno, oposto ao cateto de medida 3, tem amplitude

$$\tan^{-1}\left(\frac{3}{8}\right) = \tan^{-1}(0,375) \simeq 20,56^\circ.$$

Podemos concluir que os triângulos coloridos a azul e vermelho não são semelhantes. Por outro lado, no triângulo retângulo com catetos de medidas 13 e 5, o menor ângulo interno tem amplitude

$$\tan^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) = \tan^{-1}(0,3785) \simeq 21,04^\circ.$$

Se os três triângulos fossem sobrepostos, de modo aos catetos de maior comprimento ficarem sobre uma mesma reta e os vértices dos menores ângulos internos ficarem coincidentes, então as suas hipotenusas não definiriam uma mesma reta.

Atendendo às medidas dos ângulos determinadas acima, com exceção do vértice comum, todos os outros pontos pertencentes à hipotenusa do triângulo vermelho (azul) estariam situados abaixo (acima, respetivamente) dos pontos das outras duas hipotenusas.

Proposta de Resolução 4

Seja D o ponto comum aos triângulos vermelho e azul da figura inicial. As amplitudes dos ângulos internos de vértice D destes dois triângulos são

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{8}{3}\right) \simeq 69,44^\circ$$

e

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) \simeq 21,80^\circ,$$

respetivamente. No polígono laranja, o ângulo interno de vértice D é um ângulo reto. A soma das três amplitudes destes ângulos internos,

$$\alpha + 90^\circ + \beta \simeq 181,24^\circ,$$

é superior à amplitude de um ângulo raso. Podemos concluir que as quatro peças coloridas da figura inicial formam um quadrilátero côncavo.

Seja E o ponto comum aos triângulos vermelho e azul da segunda figura. Como as amplitudes dos ângulos internos de vértice E destes dois triângulos são

$$90^\circ - \beta \simeq 69,10^\circ$$

e

$$90^\circ - \alpha \simeq 20,66^\circ,$$

mantendo-se reto o ângulo interno de vértice E do hexágono laranja, a soma destas três amplitudes,

$$(90^\circ - \beta) + 90^\circ + (90^\circ - \alpha) \simeq 179,76^\circ,$$

é inferior à amplitude de um ângulo raso. Podemos concluir que as quatro peças coloridas e o quadrado “perdido” da segunda figura formam um quadrilátero convexo.

Proposta de Resolução 5

Fixado um referencial cartesiano ortogonal e monométrico, no plano da figura inicial, com:

- origem no vértice do menor ângulo interno do triângulo colorido a vermelho;
- eixos coordenados paralelos aos catetos do mesmo triângulo;
- unidade de comprimento dos eixos determinada pela medida do lado de cada quadrícula da figura;

identificamos os pontos de coordenadas

$$A(0,0), \quad B(13,0), \quad C(13,5), \quad D(8,3), \quad E(5,2).$$

Nota-se que o ponto E corresponde ao vértice comum dos triângulos vermelho e azul na segunda figura, se esta fosse sobreposta à primeira.

Vamos confirmar se o ponto D se encontra sobre a reta AC .

Para isso, determinamos uma equação reduzida da reta AC . Se a reta passa pela origem, então tem ordenada na origem $b = 0$; se também passa pelo ponto de coordenadas $(13,5)$, então tem declive

$$m = \frac{5-0}{13-0} = \frac{5}{13}.$$

Assim, a equação reduzida da reta AC é

$$y = \frac{5}{13}x.$$

As coordenadas $(8,3)$ do ponto D não satisfazem a equação da reta, porque para $x = 8$ tem-se que

$$y = \frac{40}{13} > 3.$$

Portanto, o ponto D encontra-se situado abaixo da reta AC .

Tal significa que D é vértice de um ângulo interno côncavo no quadrilátero $[ABCD]$.

Conclui-se que o *menor* polígono que contém as quatro peças coloridas da primeira figura é um quadrilátero côncavo.

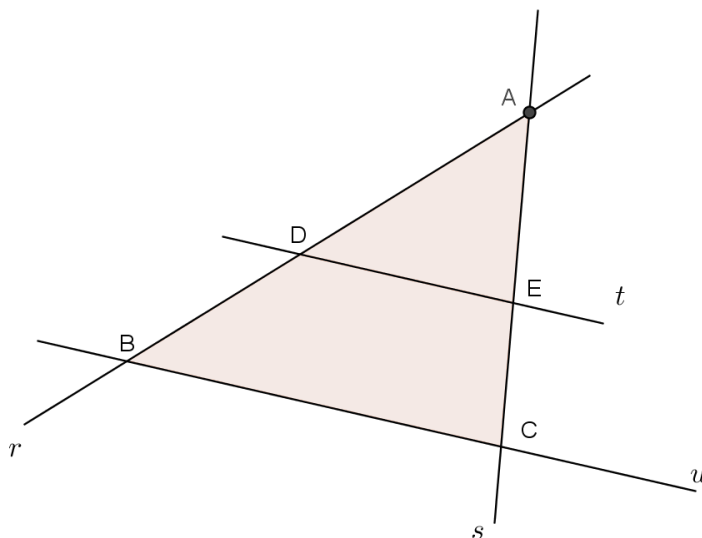
Por um raciocínio análogo, podíamos mostrar que o *menor* polígono que contém as quatro peças coloridas e o quadrado branco da segunda figura é um quadrilátero convexo.

De acordo com a Proposta de Resolução 1, este quadrilátero convexo tem 33 unidades quadradas de área e o quadrilátero côncavo $[ABCD]$ tem 32 unidades quadradas de área. A diferença de precisamente uma unidade quadrada de área, a área do quadrado “perdido”, encontra-se escondida na área do quadrilátero $[AECD]$.

Proposta de Resolução 6

Pelo Teorema de Tales no triângulo, toda a reta paralela a um lado de um triângulo determina sobre os outros dois lados, quando por ela intersecados, segmentos proporcionais. Podemos concluir que lados correspondentes em triângulos semelhantes são proporcionais.

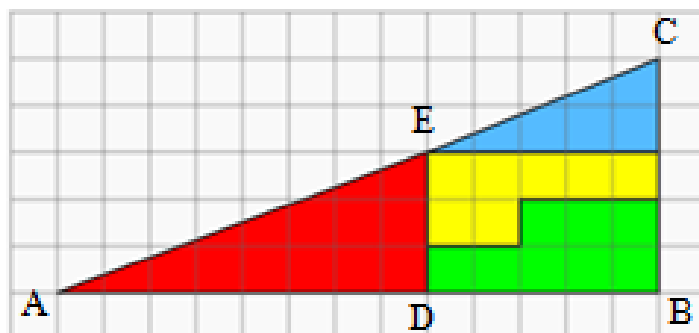
Sejam r e s duas retas que se intersectam num ponto A e t e u duas retas paralelas, do mesmo plano, que intersectam as retas r e s , respetivamente, nos pontos D , B , E e C , como a figura sugere.



Assim, a partir do Teorema de Tales, temos as seguintes igualdades:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}.$$

Consideramos a nossa figura inicial e, entre os vértices dos polígonos coloridos, marcamos os pontos A, B, C, D, E , como indicado na próxima imagem.



De seguida, supondo que os quatro polígonos coloridos formam um triângulo retângulo de hipotenusa $[AC]$, averiguemos se neste vale o Teorema de Tales.

Podemos verificar que não são diretamente proporcionais os comprimentos dos segmentos $[AD]$ e $[DE]$ com $[AB]$ e $[BC]$. De facto,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{13}{8} \neq \frac{5}{3} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}},$$

pois

$$39 = 13 \times 3 \neq 5 \times 8 = 40.$$

Então as quatro figuras coloridas não formam um triângulo e os pontos A , E , C não estão sobre uma mesma reta, isto é não são colineares.

Vamos ainda calcular o comprimento que teria o segmento $[BC_1]$, se considerássemos C_1 como sendo o ponto de interseção entre as retas AE e BC , recorrendo ao Teorema de Tales, a partir de

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC_1}}{\overline{DE}}.$$

Nesse caso,

$$\frac{13}{8} = \frac{\overline{BC_1}}{3},$$

ou seja,

$$\overline{BC_1} = \frac{39}{8} < 5 = \overline{BC}.$$

Concluimos que o ponto C_1 se localizaria no interior de $[BC]$, logo, abaixo da reta AC .

Portanto $[ABCE]$ é um quadrilátero côncavo.

Também poderíamos analisar a segunda construção, contendo os quatro polígonos coloridos e a quadrícula branca adicional, recorrendo ao Teorema de Tales, para concluir que esta segunda construção forma um quadrilátero convexo e, assim sendo, naturalmente distinto do anterior.

Proposta de Resolução 7

Vamos comparar as duas construções das imagens, efetuando a sobreposição das figuras, como se indica abaixo.



Verificamos que as duas figuras, aparentemente constituindo um mesmo triângulo retângulo, não coincidem. Mais se observa que, estando justapostas, as hipotenusas dos triângulos coloridos a vermelho e azul não formam uma linha reta, embora seja criada essa ilusão de ótica.

Em síntese, as propostas de resolução anteriores apresentam vários olhares sobre o mesmo problema, recorrendo a conhecimentos adquiridos em diferentes níveis de ensino.

Todas permitiram encontrar uma explicação lógica para o paradoxo de Curry e seu o quadrado aparentemente perdido.

Portanto, não podemos confiar inteiramente naquilo que parece estarmos a ver.

A observação de uma figura, ou o que esta possa sugerir, deve despertar o sentido crítico do observador. Sempre que possível, devemos recorrer a conhecimentos científicos para confirmar ou refutar uma conjectura que possa ter sido formulada a partir de uma imagem.

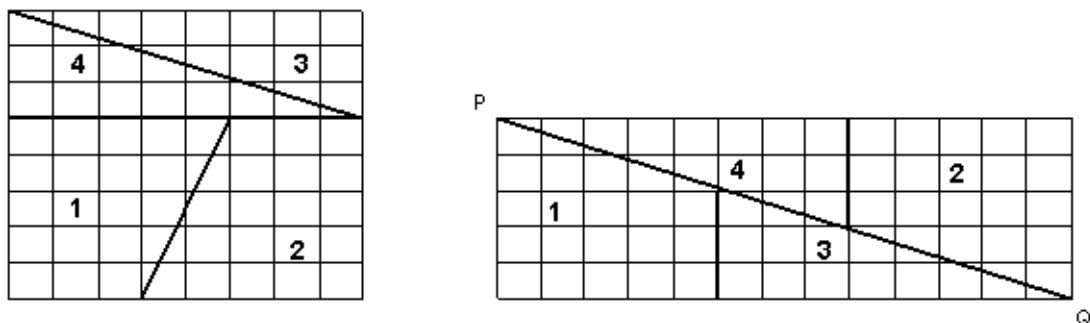
4.1.1 Outros paradoxos com quadrados adicionados e perdidos

Nesta subsecção, apresentamos mais dois paradoxos geométricos, envolvendo quadrados adicionados ou perdidos em resultado da divisão e reordenação das peças de uma figura que aparentemente conduzem à construção de figuras com áreas distintas da inicial. Fica a cargo do leitor a procura de uma explicação adequada a cada caso, inspirada por alguma das resoluções antes proposta para o problema do paradoxo de Curry.

Problema 1

Suponhamos que temos um papel quadrado que se encontra dividido em 64 pequenas qua-

drículas geometricamente iguais. Depois cortamos dois triângulos e dois trapézios, como indicada na primeira figura, e tornamos a dispor as partes cortadas, como vem na segunda figura.



O lado do quadrado inicial mede 8 unidades de comprimento, então este possui 64 unidades quadradas de área, como num tabuleiro de xadrez. Os lados do retângulo resultante medem 13 e 5 unidades de comprimento, logo este tem 65 unidades quadradas de área.

Procure explicar como surge esta diferença de uma unidade de área entre o quadrado e o retângulo, que parece advir de uma quadricula adicionada.

Este enigma geométrico, por vezes designado paradoxo do tabuleiro de xadrez, foi divulgada por Sam Loyd no primeiro congresso americano de xadrez, em 1858.

Encontra-se intimamente relacionada com a sequência de Fibonacci. Se designarmos o seu termo geral por F_n , a sequência de Fibonacci encontra-se definida por recorrência do seguinte modo:

$$F_1 = F_2 = 1 \quad \text{e} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

para qualquer número natural n . Os primeiros termos são dados por

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.$$

Repare que as medidas dos lados do retângulo e do quadrado do problema anterior correspondem a três números consecutivos desta famosa sequência.

Pode provar-se que

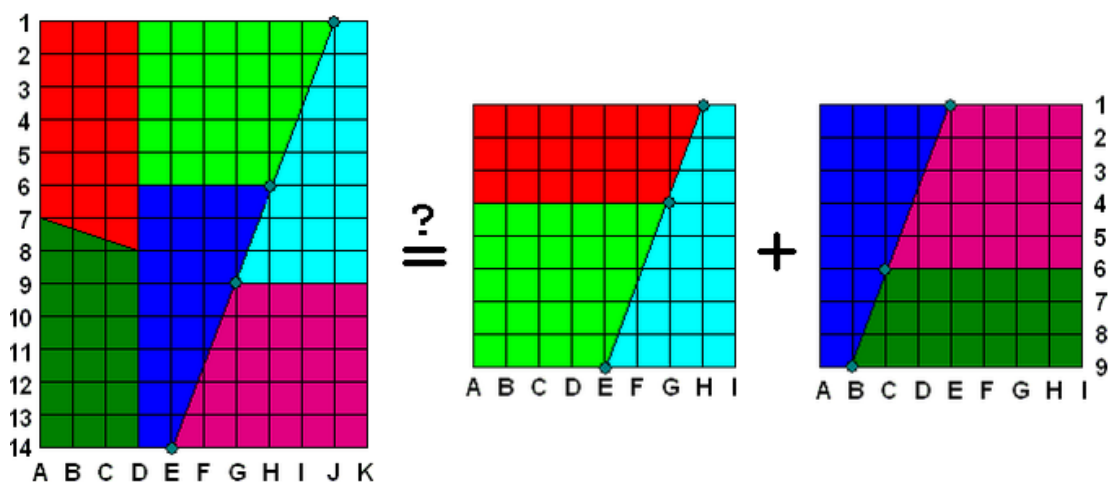
$$F_n \times F_{n+2} = F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}, \quad (4.1)$$

para qualquer número natural n . Esta identidade, relacionando três números de Fibonacci adjacentes, é denominada a Fórmula de Cassini, descoberta pelo astrónomo francês de origem italiana Giovanni Domenico Cassini, em 1680. O caso $n = 5$ em (4.1) corresponde precisamente ao problema antes apresentado.

Já agora, observamos que as medidas inteiras dos lados dos polígonos envolvidos no problema de Curry são 1, 2, 3, 5, 8 e 13, ou seja, seis números consecutivos da sequência de Fibonacci.

Problema 2

Ao analisarmos as imagens seguintes, as duas últimas figuras representam quadrados formados por 64 quadrículas, como em dois tabuleiro de xadrez, e parecem ser constituídas pelas mesmas peças que a primeira figura.



Porém, o retângulo da primeira figura contém 130 quadrículas e o número total de quadrículas que define a área nos dois quadrados com formato de tabuleiro de xadrez é apenas 128.

Procure explicar como é possível existir esta diferença de duas unidades quadradas de área.

Os anteriores paradoxos geométricos utilizam o princípio da distribuição escondida.

Sam Loyd utilizou-o na criação de vários outros puzzles interessantes.

4.2 Triângulo de Penrose ou Tribarra

A Tribarra, ou Triângulo de Penrose, parece ser um objeto sólido, constituído por três barras entrelaçadas que se encontram aos pares nos ângulos retos dos vértices dos triângulos que formam, como sugerido pela imagem seguinte.



A Tribarra foi criado pelo artista sueco Oscar Reutersvärd, em 1934. Roger Penrose, reconhecido por seus trabalhos em Física e Matemática, popularizou-a na década de 1950, descrevendo-a como “impossível em sua forma pura”. Aparece proeminente nos trabalhos do artista M. C. Escher.

Problema

Justifique se podemos representar o Triângulo de Penrose por um objeto real com três barras ligadas.

Na tabela seguinte, apresentam-se os principais pré-requisitos necessários para a resolução deste problema.

Proposta de resolução	Pré-requisitos
1	Soma dos ângulos internos de um triângulo
2	Visualizar objetos no espaço.

Proposta de Resolução 1

Se a Tribarra fosse um objeto sólido, a parte interior deste objeto formaria um triângulo. A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

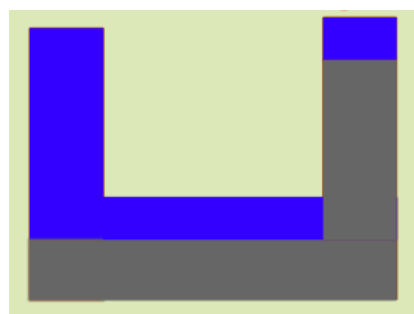
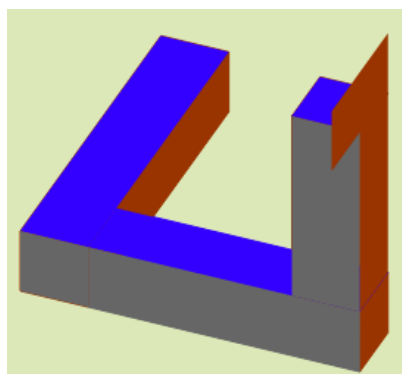
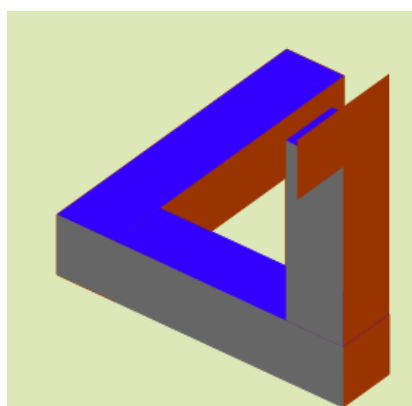
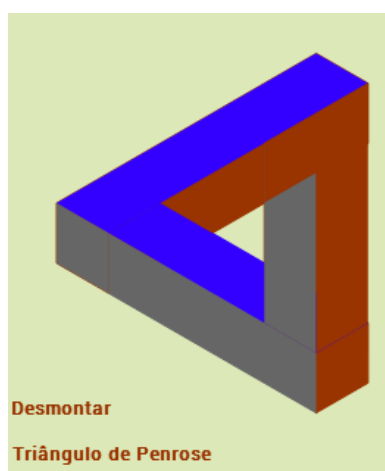
As três barras da Tribarra não podem estar unidas e cada par formar um ângulo reto, pois nesse caso a soma das amplitudes dos três ângulos seria

$$3 \times 90^\circ = 270^\circ.$$

Conclui-se que não é possível construir um objeto assim descrito. Na realidade, as barras deste objeto não podem estar ligadas.

Proposta de Resolução 2

Existem formas tridimensionais sólidas que, quando vistas de um certo ângulo, parecem ter todas as características do Triângulo de Penrose. Observando as imagens seguintes, podemos vê-lo de outro ponto de vista.



O objeto construído, como sugerido nas figuras anteriores, pode existir na realidade. Contudo, as três barras não se encontram unidas, como parece indicar a perspectiva da primeira imagem.

Podemos ainda visualizar uma construção idêntica com um destes objetos sólidos tridimensionais colocado em frente a um espelho.



Apesar de a combinação de propriedades descrita no Triângulo de Penrose não se poder materializar num objeto real, concluímos que existem formas tridimensionais sólidas que, quando vistas de um certo ângulo, parecem ter todas as características da Tribarra. Na realidade, podemos encontrar esculturas tridimensionais alusivas ao Triângulo de Penrose, por exemplo, em East Perth, na Austrália, e na entrada da sala do piso superior do Pavilhão do Conhecimento, em Lisboa, como podemos observar nas fotografias seguintes.

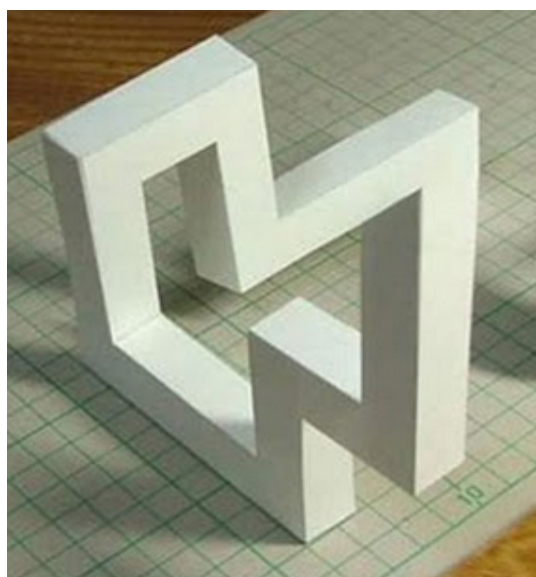
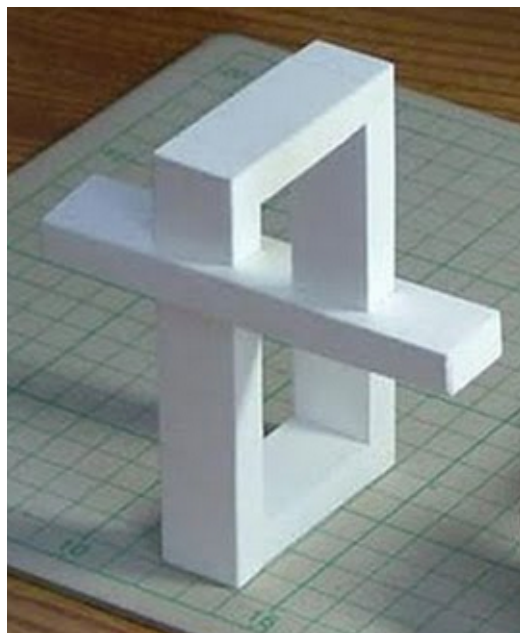


Educando a nossa mente, podemos concluir que aquilo que nos parecia impossível pode existir, embora na realidade possa ser diferente do que pensávamos.

Treinando a mente e os olhos, podemos adquirir capacidades para perceber mais facilmente outras construções idênticas.

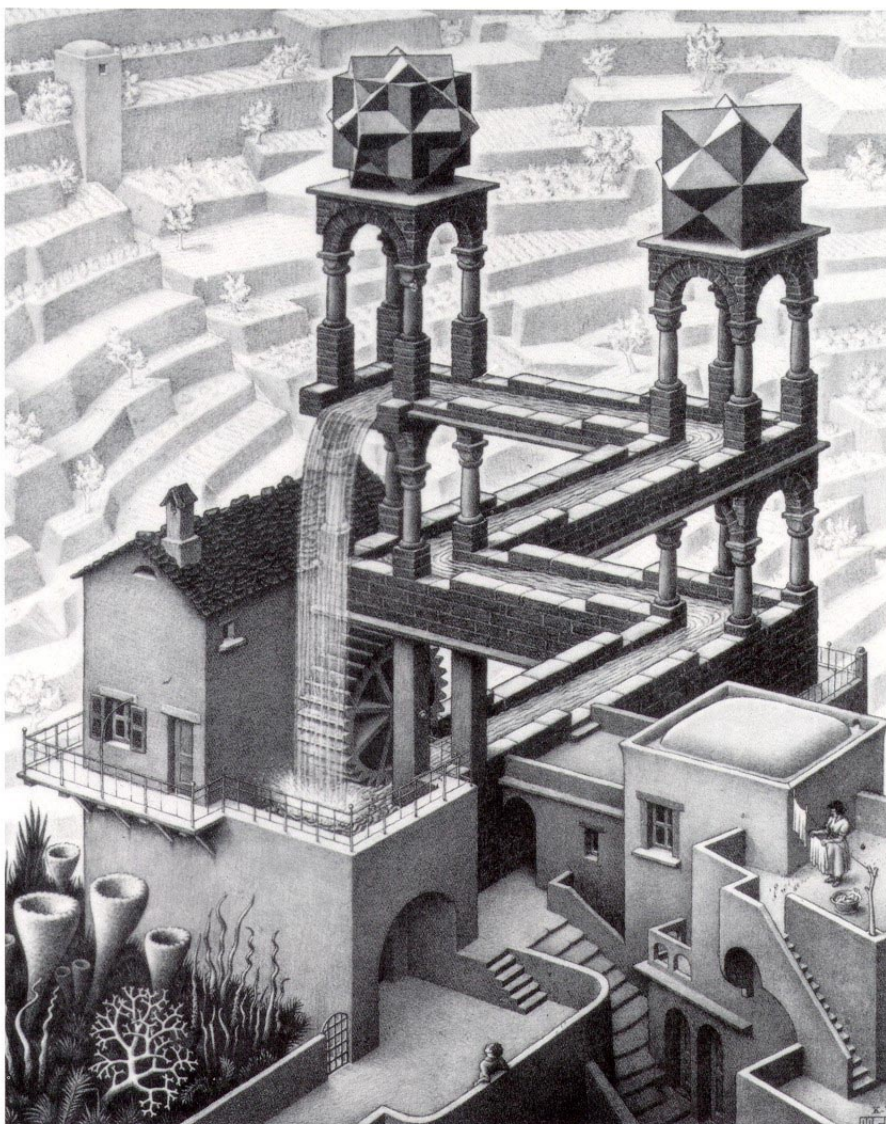
4.2.1 Outras imagens

Nesta subseção, deixamos como desafio para o leitor tentar descobrir como será possível construir os objetos a seguir representados.



4.3 A cascata impossível de Escher

Maurits Cornelis Escher foi um artista gráfico holandês. Uma das principais contribuições da obra deste artista está na sua capacidade de gerar imagens com efeitos de ilusões de ótica. A cascata impossível é uma das suas litografias mais conhecidas, impressa em 1961. Contém a imagem de uma cascata em que a água parece estar a subir por um aqueduto em ziguezague que depois cai no ponto de partida, fazendo girar a roda de um moinho.



Problema

Explique se é possível construir a cascata desenhada por M. C. Escher.

Proposta de Resolução

Vamos analisar a próxima sequência de imagens.



A construção da cascata tal como a imaginamos inicialmente, com o curso da água contínuo, é impossível. Ainda assim, é possível ter uma representação como a sugerida pelas imagens anteriores, de modo que, de um certo ângulo, se pode observar a cascata como foi desenhada por Escher.

Podemos agora olhar para muitos outros desenhos de cenas impossíveis imaginadas por Escher com outra visão e um mais apurado sentido crítico.

Conclusão

Terminamos com uma reflexão pessoal sobre o potencial pedagógico das provas sem palavras e uma descrição breve da experiência em contexto de sala de aula decorrente da aplicação de algumas tarefas, envolvendo os problemas que inauguram cada capítulo da dissertação.

Sobre a dimensão pedagógica das provas sem palavras

As provas sem palavras apresentam os problemas e soluções de forma visual, promovendo a assimilação de conhecimentos matemáticos. A visualização facilita a compreensão. Já no séc. VI a.C. os pitagóricos associavam os números a figuras geométricas, permitindo assim a sua visualização. Os números triangulares, resultantes da soma de números inteiros consecutivos, eram representados em forma triangular. Os números quadrados, resultantes da soma de números ímpares consecutivos, eram representados na forma quadrangular. Hoje em dia, 4, 9, 16, 25, 36, ... designam-se por quadrados perfeitos, daqui a razão de ser da expressão “número ao quadrado”. Também se falava em números redondos e retangulares.

A assimilação consiste no relacionamento com conhecimentos anteriormente adquiridos. Qualquer nova aprendizagem implica esse relacionamento. Compreender evita o isolamento de uma nova aquisição, integrando-a numa totalidade, no conjunto dos saberes prévios.

Por sua vez, quem assimila adequadamente torna-se apto, ganha competências para aplicar o que previamente assimilou em situações novas. A assimilação integra-se no passado e a competência aponta para o futuro, para a solução de novos problemas ou para a criação de novas vias para resolver o mesmo problema.

Os conhecimentos são uma realidade objetiva, passível de existência independente do sujeito. Depois de criadas, as demonstrações do Teorema de Pitágoras, por exemplo, passam a fazer parte do património comum dos conhecimentos. As competências, diferentemente, têm uma existência subjetiva, na medida em que existem apenas nos sujeitos que as possuem. Ter uma competência significa estar apto a pôr em prática conhecimentos e capacidades. Criar vários processos de solução de um problema significa operacionalizar uma competência, manifestando-a em várias situações concretas. O exercício destas competências promove a motivação. Se o aluno percebe que tem uma determinada capacidade, tentará demonstrá-la novamente, criando novos processos de pensamento. Sente-se valorizado, pe-

rante si próprio e perante os outros. Este tipo de motivação intrínseca é a mais eficaz. A motivação extrínseca, como a receção de um prémio por bom desempenho, é menos eficaz e menos duradoura. Se desaparecer o prémio, desaparecerá a motivação. A motivação é um aspeto relevante para a aprendizagem atingir o domínio da excelência, na medida em que lhe dá o suporte dinâmico, a força produtiva.

É possível criar um círculo virtuoso entre provas sem palavras, assimilação, competências e motivação. Uma prova sem palavras não ensina, mas "mostra". Desta forma, é o estudante que vê, que apreende a evidência, não porque outros disseram que era assim. O estudante que compreende uma regra, sabe aplicá-la em diferentes contextos.

Reconhece-se que investigar conjecturas matemáticas, desenvolver e avaliar argumentos matemáticos, selecionar e usar vários tipos de raciocínio ou métodos de demonstração são aspetos fundamentais da disciplina de Matemática que devem ser promovidos pelo professor. As provas sem palavras apelam à visualização das evidências e à verdadeira compreensão dos problemas, estimulam o desenvolvimento de competências nos estudantes, incrementam a motivação para novas aprendizagens e descobertas. É claro que o professor deve preocupar-se em formar estudantes competentes e não apenas possuidores de conhecimentos.

Aplicação na prática pedagógica

Alguns dos temas abordados nesta dissertação foram aplicados pela autora na sua prática pedagógica, enquanto professora de Matemática. As atividades apresentadas em sala de aula dirigiram-se a estudantes do 3.º ciclo do Ensino Básico e Ensino Secundário de uma escola pública do distrito da Guarda, em Portugal.

Nas duas turmas do 8.º ano de escolaridade, os estudantes apreciaram as provas sem palavras do Teorema de Pitágoras. Pode dizer-se que, para muitos alunos, custou analisar e interpretar as figuras, mas foi recompensador ver a reação de alguns quando compreenderam as relações das imagens: quase saltaram da cadeira, disseram frases como sejam: "Que giro!", "Onde é que a professora arranjou estas imagens?", "Tantas demonstrações".

Foi proposto aos alunos do 7.º ano que resolvessem o Problema 1 do Capítulo 2 por mais de um processo. Foi interessante a reação positiva. Parece que nunca tinham sido confrontados com a resolução de um exercício por mais do que um processo e as vantagens de compreensão daí decorrentes. Foram capazes de apresentar as três resoluções propostas nesta dissertação independentemente. Reagiram de forma muito idêntica os alunos do 10.º ano de escolaridade quando deparados com o Problema 1 do Capítulo 3. Contudo, neste caso, observa-se que nenhum aluno optou por uma abordagem geométrica.

Quando foi apresentado o Problema 1 do Capítulo 4, sobre o paradoxo do quadrado perdido, na sala de aula, muitos estudantes associaram-o de imediato a um vídeo que já tinham visualizado na Internet, contendo a "tablete de chocolate infinita", para o qual não conheciam

uma explicação. Gostaram de saber a justificação para o paradoxo de Curry e, mediante a situação estudada, conseguiram encontrar uma justificação para o desaparecimento do quadrado de chocolate.

A procura de resoluções diferentes para um exercício captou a atenção e cativou um maior número de alunos. Estes ganharam confiança e sentiram-se mais capazes e seguros ao abraçar a resolução de um exercício novo. É importante que o aluno tenha consciência que por vários caminhos pode chegar a uma mesma solução. Alguns alunos têm maior apetência para usar argumentos analíticos ou algébricos e outros para os raciocínios geométricos.

Cada vez mais a sociedade apela aos sentidos através da imagem. Como diz o provérbio: "uma imagem vale mais que mil palavras".

Quando adequadamente usadas no Ensino da Matemática, as provas sem palavras podem ser uma ferramenta poderosa e um contributo muito enriquecedor para os alunos captarem interligações entre alguns conceitos algébricos e geométricos, aparentemente distintos, mas que se completam. Consideramos, por isso, que seria muito vantajosa a divulgação de provas sem palavras, um tema ainda pouco conhecido entre os professores de Matemática, assim como a referência a paradoxos geométricos, em sala de aula e nos manuais escolares de Matemática nestes níveis de ensino.

Matemática de modo algum são
fórmulas, assim como a música não
são notas.

Y. Jurquim

Bibliografia

- [1] Alsina, Claudi e Nelsen, Roger B.; *Math Made Visual: Creating Images for Understanding Mathematics*; Washington: Mathematical Association of America, 2006. ISBN 0-88385-746-4
- [2] Alsina, Claudi e Nelsen, Roger B.; *When Less is More: Visualizing Basic Inequalities*; Washington: Mathematical Association of America, 2009. ISBN 978-0-88585-342-9
- [3] Alsina, Claudi e Nelsen, Roger B.; *Charming Proofs: A Journey Into Elegant Mathematics*; Washington: Mathematical Association of America, 2010. ISBN 978-0-88385-348-1
- [4] Alsina, Claudi e Nelsen, Roger B.; *Icons of Mathematics: An Exploration of Twenty Key Images*; Washington: Mathematical Association of America, 2011. ISBN 978-0-88385-986-5
- [5] Alsina, Claudi e Nelsen, Roger B.; Um convite a provas sem palavras (Trad. de Germana Barata do original em inglês do *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 3, n.º 1, pp. 118-127, 2010), *ComCiência*, n.º 143, Campinas, novembro de 2012; <http://www.comciencia.br/comciencia/handler.php?section=8&edicao=83&id=1028>. Acedido em 25 de outubro 2015.
- [6] Bogomolny, Alexander; *Dissection of a rectangle into two chessboards, Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles*; <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/TwoChessboards.shtml>. Acedido em 25 de outubro 2015.
- [7] Bogomolny, Alexander; *Pythagorean Theorem and its many proofs, Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles*; <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml>. Acedido em 18 de novembro de 2015.
- [8] Conceição, Alexandra e Matilde, Almeida; *Matematicamente Falando 7*; Areal Editores, 2010.
- [9] Costa, Belmiro e Rodrigues, Ermelinda; *Novo Espaço 10.º ano*; Porto: Porto Editora, 2013.

- [10] Descartes, René; *Princípios da Filosofia* (Trad. de Alberto Ferreira); Lisboa: Guimarães Editores, 1971, pp. 89-90.
- [11] *Dinâmica: uma coleção de artefactos matemáticos utilizando geometria dinâmica*; <http://www.dinamica.com.br/2011/11/triangulo-de-penrose.html>. Acedido em 25 de outubro 2015.
- [12] Direção Geral da Educação; *Programas e Metas Curriculares: Matemática*; <http://www.dge.mec.pt/matematica>. Acedido em 25 de outubro 2015.
- [13] Doyle, Tim; Kutler, Lauren; Miller Robin e Schueller, Albert; Proofs without words and beyond, *Convergence*; Mathematical Association of America, agosto de 2014.
- [14] *Ilusão de Ótica - Amostras dos Impossíveis*; <http://buratto.org/optica/Thimposs.html>. Acedido em 25 de outubro 2015.
- [15] *iMat12 - Programação Linear e Geometria*; <https://books.google.pt/books?isbn=9899856096>. Acedido em 25 de outubro 2015.
- [16] Isaacs, Rufus; Two mathematical papers without words, *Mathematics Magazine*; Mathematical Association of America, setembro de 1975.
- [17] Loomis, Elisha Scott; *The Pythagorean Proposition, Classics in Mathematics Education Series*, (republicação da 2.^a edição de 1940); Washington D.C.: *National Council of Teachers of Mathematics*, 1968.
- [18] *Many Proofs of Pythagorean Theorem*; http://www.takayaiwamoto.com/Pythagorean_Theorem/Pythagorean_Theorem.html. Acedido em 25 de outubro 2015.
- [19] Nelsen, Roger B.; *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*; Mathematical Association of America, 1993.
- [20] Nelsen, Roger B.; *Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking*; Mathematical Association of America, 2000.
- [21] Neves, Maria Augusta Ferreira; Guerreiro, Luís; Leite, António e Silva, Jorge Nuno; *Matemática A 10.º Ano*; Porto: Porto Editora, 2010.
- [22] Neves, Maria Augusta Ferreira; Guerreiro, Luís; Leite, António e Silva, Jorge Nuno; *Matemática A 10.º Ano, Guia do Professor*; Porto: Porto Editora, 2010.
- [23] Paradoxo do quadrado perdido, In *Wikipédia*, https://pt.wikipedia.org/wiki/Paradoxo_do_quadrado_perdido. Acedido em 25 de outubro 2015.

- [24] *Paradoxos Geométricos*; <http://www.prof2000.pt/users/jdsa03/olho/0405/1p04/geometricos.htm>. Acedido em 25 de outubro 2015.
- [25] *Pitágoras@net*; <http://www.prof2000.pt/users/paulap/pitagoras.html>. Acedido em 25 de outubro 2015.
- [26] Pólya, George; *Como Resolver Problemas*; Gradiva, 2003.
- [27] *Provas Sem Palavras*; http://www.atractor.pt/mat/sem_palavras/saber_mais/pww.htm. Acedido em 25 de outubro 2015.
- [28] Rey, Bernard; Carette, Vincent; DeFrance, Anne e Kahn, Sabine; *As Competências na Escola* (Trad. de Isilda Lourenço Afonso); V. N. Gaia: Edições Gailivro, 2005.
- [29] *Sólidos Platónicos*; <http://avrinc05.no.sapo.pt/Duais.htm>. Acedido em 25 de outubro 2015.
- [30] Teorema de Tales (interseção), In *Wikipédia*; [https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Tales_\(interseção\)](https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Tales_(interseção)). Acedido em 25 de outubro 2015.
- [31] Triângulo de Penrose, In *Wikipédia*; https://pt.wikipedia.org/wiki/Triângulo_de_Penrose. Acedido em 25 de outubro 2015.
- [32] Truncatura de um sólido, In *Wikipédia*; https://pt.wikipedia.org/wiki/Truncatura_de_um_sólido. Acedido em 25 de outubro 2015.